

10



MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII AL REPUBLICII MOLDOVA

Ион Акири Петру Ефрос Валентин Гарит Николае Продан

Математика

Учебник для 10-го класса



EDITURA
PRUT

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII AL REPUBLICII MOLDOVA

Ион Акири

Петру Ефрос

Валентин Гарит

Николае Продан

Математика

Учебник для 10-го класса



Acest manual este proprietate publică, editat din sursele financiare ale Fondului special pentru manuale.

Manualul școlar a fost elaborat în conformitate cu prevederile curriculumului la disciplină, aprobat prin Ordinul ministrului educației și cercetării nr. 906 din 17 iulie 2019. Manualul a fost aprobat prin Ordinul ministrului educației și cercetării nr. 1867 din 20 decembrie 2024 ca urmare a evaluării calității metodicо-științifice.

(наименование учебного заведения)

УЧЁТ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ УЧЕБНИКА

Год пользования	Фамилия и имя ученика	Учебный год	Состояние учебника	
			в начале года	в конце года
1				
2				
3				
4				
5				

- Учитель должен проверить правильность написания фамилии и имени ученика.
- Запрещаются записи и любые пометки на страницах учебника.
- Состояние учебника в начале и в конце учебного года оценивается как: *отлично, хорошо, удовлетворительно* или *плохо*.

Autori: Ion Achiri, doctor, conferențiar universitar, UPS „Ion Creangă” (modulele 5, 7, 8)
Petru Efros, doctor, conferențiar universitar, USM (modulele 4, 9)
Valentin Garit, doctor, conferențiar universitar, USM (modulele 4, 9)
Nicolae Prodan, doctor, conferențiar universitar, USM (modulele 1, 2, 3, 5, 6)

Toate drepturile asupra acestei ediții aparțin Editurii Prut Internațional. Reproducerea integrală sau parțială a textului sau a ilustrațiilor din acest manual este posibilă numai cu acordul scris al editurii.

Traducere din limba română: Ion Achiri
Redactor: Vitalie Puțuntică
Corector: Tatiana Șarșov
Copertă: Irina Cuzin
Machetare computerizată: Valentina Stratu

© I. Achiri, P. Efros, V. Garit, N. Prodan, 2025
© Editura Prut Internațional, 2025

Editura Prut Internațional, str. Alba Iulia, nr. 23, bl. 1 A, Chișinău, MD-2051
Tel.: (+373 22) 75 18 74; (+373 22) 74 93 18
www.edituraprut.md; e-mail: office@prut.ro

Descrierea CIP a Camerei Naționale a Cărții

Achiri, Ion

Математика: Учебник для 10 класса / Ион Акири, Валентин Гарит, Петру Ефрос, Николае Продан; traducere din limba română: Ion Achiri; Ministerul Educației și Cercetării al Republicii Moldova. – [Chișinău]: Prut Internațional, 2025 (Blitz Poligraf). – 224 p.

ISBN 978-9975-54-853-3

51(075.3)

A 340

Imprimat la Tipografia Blitz Poligraf

Предисловие

Настоящий учебник составлен в соответствии с действующим Куррикулумом по математике для лицеев (2019). Структура и концепция данного пособия позволят реализовать цели, предусмотренные куррикулумом для X класса.

Учебник разбит на модули. В начале каждого модуля приводятся основные цели, которые могут быть достигнуты в процессе его изучения. Цели, обозначенные звездочкой (*), предназначены для учащихся реального профиля. Учебник содержит разделы по алгебре, математическому анализу, геометрии, математической логике, теории множеств, тригонометрии.

Учебник дает возможность реализовать на практике принцип конструктивности и формирующий принцип, положенные в основу математического образования. С этой целью авторы уделили особое внимание как взаимосвязи понятий различных разделов, так и систематическому повторению основных понятий, раскрывая их различные аспекты. Для понимания и осмысления понятий приведены мотивационные задачи, а также примеры применения этих понятий в других областях человеческой деятельности, включая повседневную жизнь. С этой же целью в конце некоторых модулей приведены понятийные карты (итоговые таблицы), которые помогут систематизировать материал и выделить главные связи между понятиями или между различными составляющими одного и того же понятия.

Структура учебника разработана с учетом преподавания математики как для реального профиля, так и для гуманитарного профиля, профилей искусство и спорт. Отметим, что **материал, предусмотренный только для учащихся реального профиля, обозначен вертикальной чертой слева. Для гуманитарного профиля, профилей искусство и спорт этот материал предлагается как дополнительный.** Кроме того, в соответствии с образовательными целями, упражнения и задачи, приведенные в конце каждого параграфа (в частности, для некоторых пунктов), а также в конце каждого модуля, классифицированы по профилям:

- а) гуманитарный профиль, профили искусство и спорт: **A** – знание и понимание, **B** – применение, **C** – интегрирование;
- б) реальный профиль: **A₁** – знание и понимание, **B₁** – применение, **C₁** – интегрирование.

Примеры и задачи, предназначенные для гуманитарного профиля, профилей искусство и спорт, могут быть предложены и учащимся реального профиля.

Учебник поможет в организации самостоятельной работы учащихся. Система мотивационных примеров, примеров для закрепления, а также для применения понятий позволит учащимся лучше осмыслить и усвоить как новые понятия, так и некоторые аспекты уже известных (например, монотонность и экстремумы функций, уравнения и неравенства новых типов и др.).

Каждый модуль учебника завершается упражнениями и задачами на повторение, которые, как правило, имеют более высокий уровень внутри- и межпредметной интеграции. Решение этих заданий эффективно способствует формированию специфических компетенций по математике.

Учебник позволит ученикам, увлеченным математикой, расширить свои знания посредством усвоения дополнительных понятий и решения более сложных заданий, обозначенных звездочкой (*).

Авторы

МОДУЛЬ 1 Действительные числа. Повторение и дополнения

Числа правят миром.

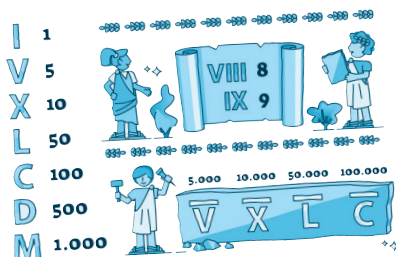
Пифагор

Цели

- распознавание элементов изученных числовых множеств ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$) и различные формы записи действительных чисел;
- применение терминологии, соответствующей понятию числа;
- переход от одной к другой форме записи действительных чисел;
- геометрическое изображение действительных чисел;
- выполнение изученных операций с действительными числами;
- применение свойств операций над действительными числами для упрощения вычислений;
- сравнение действительных чисел различными способами;
- применение модуля действительного числа в различных ситуациях;
- применение пропорций, процентов в различных контекстах.

§1 Рациональные, иррациональные, действительные числа

Из истории



Науке и технике потребовался долгий путь эволюции, пока не появились компьютеры и Интернет как средство общения. Точно также человечество прошло через множество этапов развития до появления понятия числа. Различные цивилизации и культуры (вавилонская, египетская, китайская, индийская) пошли разными путями. В древности появились римские символы: I, II, III, IV, V, X, L, C, M, $\bar{V}$, $\bar{M}$, а затем вошли в использование (включительно у индусов) арабские цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Известно соотношение между арабскими и римскими цифрами:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX

Система, основанная на римских символах, была неудобна для выполнения вычислений (в этой системе отсутствовала цифра 0). Система, основанная на арабских цифрах, появилась в Европе 1500 лет назад.

Развитие понятия числа всегда было связано с выполнением арифметических действий над числами и позволило выявить некоторые их свойства.

Вспомним изученные числовые множества:

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$ – множество натуральных чисел,
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ – множество целых чисел,
- $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$ – множество рациональных чисел,
- $\mathbb{I}$ – множество иррациональных чисел (числа, не являющиеся рациональными),
- $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ – множество действительных чисел.

Если K – одно из вышеуказанных множеств, то через K^* , K_+ , K_- обозначаются соответственно множество ненулевых чисел, множество неотрицательных чисел, множество неположительных чисел из числового множества K .

Любое рациональное число может быть записано:

1. в виде дроби $\frac{m}{n}$, где $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$;
2. в виде действительного числа (конечного или бесконечного периодического).

Примеры

а) $\frac{23}{1000} = 0,023$; б) $\frac{1}{3} = 0,33... = 0,(3)$; в) $\frac{1046}{495} = 2,1(13)$; г) $0,023 = \frac{23}{1000}$;
 д) $0,(3) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$; е) $2,1(13) = 2 + 0,1(13) = 2 + \frac{113-1}{990} = 2 + \frac{112}{990} = 2 + \frac{56}{495} = \frac{1046}{495}$.

Ряд задач можно решить с помощью числовых множеств $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$. Однако рациональные числа недостаточны для решения некоторых задач.

Задача

Найдем длину диагонали прямоугольника, длины сторон которого равны 1 и 2.

Решение:

Пусть a – длина диагонали прямоугольника. Тогда, согласно теореме Пифагора, $a^2 = 1^2 + 2^2 = 5$. Попробуем найти решение этой задачи на множестве рациональных чисел. Пусть $a = \frac{m}{k} \in \mathbb{Q}$ – несократимая дробь. Тогда $\left(\frac{m}{k}\right)^2 = 5$, откуда следует, что $m^2 = 5k^2$ и $m^2 : 5$, то есть $m : 5$ и $m = 5t$, $t \in \mathbb{N}$. После подстановки в $m^2 = 5k^2$ получаем $25t^2 = 5k^2 \Leftrightarrow 5t^2 = k^2$, то есть $k : 5$. Следовательно, дробь $\frac{m}{k}$ сократима на 5, вопреки предположению. Полученное противоречие показывает, что число a не является рациональным, поэтому данная задача неразрешима на множестве $\mathbb{Q}$.

Таким образом, длина диагонали является иррациональным числом, квадрат которого равен 5, значит, его можно записать в виде $\sqrt{5}$.

Для записи числа $\sqrt{5}$ в виде десятичного числа, вычислим его приближенные значения, используя его *десятичные приближения с недостатком и избытком*. Так как $2^2 < 5 < 3^2$, то $2 < \sqrt{5} < 3$. Числа 2 и 3 являются десятичными приближенными значениями числа $\sqrt{5}$ с недостатком и избытком соответственно с точностью до 1. Разделим отрезок $[2, 3]$ на 10 равных частей и подберем числа 2,2 и 2,3, удовлетворяющие двойному неравенству $(2,2)^2 < 5 < (2,3)^2$. Числа 2,2 и 2,3 являются десятичными приближениями числа $\sqrt{5}$ с недостатком и избытком соответственно с точностью до 10^{-1} . Аналогично найдем десятичные приближения 2,23 и 2,24 числа $\sqrt{5}$ с недостатком и избытком соответственно с точностью до 10^{-2} . Этот алгоритм может быть продолжен до бесконечности, так как квадраты полученных рациональных чисел отличны от 5 (доказали, что $\sqrt{5}$ не является рациональным числом). Полученное десятичное число 2,23... имеет бесконечное число десятичных знаков и не является (по той же причине) периодическим десятичным числом.

Известно, что числа, которые могут быть представлены в виде непериодических десятичных чисел с бесконечным числом десятичных знаков, называются **иррациональными числами**. Например, числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{7}$, $\pi = 3,1415...$ (π – отношение длины окружности к длине ее диаметра) являются иррациональными.

Напомним, что объединение множества рациональных чисел ($\mathbb{Q}$) и множества иррациональных чисел ($\mathbb{I}$) образует **множество действительных чисел**, которое обозначается буквой $\mathbb{R}$. Следовательно, $\mathbb{R}$ – это множество чисел, которые могут быть представлены в виде десятичных чисел с конечным числом десятичных знаков или периодических/непериодических десятичных чисел с бесконечным числом десятичных знаков.

Для изученных числовых множеств справедливы соотношения: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$; $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$; $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

Обобщая сказанное: десятичные числа α_n и α'_n с n цифрами после запятой называются **десятичными приближениями с недостатком** и соответственно **десятичными приближениями с избытком** иррационального числа α с точностью до 10^{-n} , если:
 ① $\alpha_n < \alpha < \alpha'_n$ и ② $\alpha'_n - \alpha_n = 10^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Таким образом, каждому иррациональному числу α или каждому десятичному периодическому числу соответствуют две бесконечные последовательности рациональных десятичных чисел $(\alpha_n)_{n \geq 0}$, $(\alpha'_n)_{n \geq 0}$, $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющие свойствам ① и ②.

Условимся рассматривать аналогичные последовательности десятичных приближений рационального числа α , считая, что $\alpha_n = \alpha'_n = \alpha$, начиная с некоторого индекса n_k . Например, для $\alpha = 2,719$ имеем:

$$\alpha_0 = 2, \alpha'_0 = 3; \alpha_1 = 2,7, \alpha'_1 = 2,8; \alpha_2 = 2,71, \alpha'_2 = 2,72; \\ \alpha_3 = 2,719 = \alpha'_3 = \alpha_4 = \alpha'_4 = \dots = \alpha_n = \alpha'_n = \alpha \quad (n_k = 3).$$

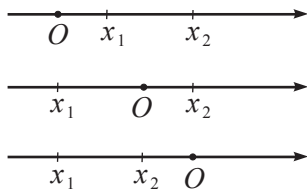
Эти последовательности применяются при введении операций над произвольными действительными числами.

§2 Изображение действительных чисел на числовой оси. Сравнение действительных чисел

О Вспомним

Известно, что каждому рациональному числу a соответствует на числовой оси Ox единственная точка M такая, что $OM = |a|$, и наоборот. Если $a > 0$, точка M принадлежит положительной полуоси, если $a < 0$, точка M принадлежит отрицательной полуоси, а если $a = 0$, точка M совпадает с точкой O . Число a называется **координатой** точки M . Используя это соответствие, действительные числа могут быть изображены геометрически.

В зависимости от формы представления действительных чисел применяются различные способы их сравнения.



1. Из двух действительных чисел, изображенных на числовой оси, бóльшим является число, которое правее другого (в положительном направлении).
2. Любое положительное число больше любого отрицательного числа (независимо от формы его представления).
3. Из двух отрицательных действительных чисел бóльшим является число, модуль которого меньше.
4. Пусть оба числа положительные.
 - а) Если оба числа представлены в виде обыкновенных дробей с одинаковыми знаменателями, то больше то число, числитель которого больше.
 - б) Если они представлены в виде десятичных чисел, то сравниваются цифры, стоящие на одинаковых местах от запятой: больше то число, у которого больше первая несовпадающая цифра слева (цифры, расположенные слева от первой значащей цифры, считаются равными 0). ($12,97 > 9,99 = 09,99$; $2,193 > 2,183$)
5. Если оба числа представлены как значения функции, то применяются (для их сравнения) свойства монотонности этой функции.
6. Если числа записаны в смешанной форме, то делается определенное предположение (например, $a > b$) и применяются свойства неравенств до получения равносильного очевидного неравенства или до определения знака их разности.
7. В более сложных случаях прибегаем к нахождению приближенных значений соответствующих чисел.



Задание с решением

Сравним числа: а) $3\sqrt{5}$ и $5\sqrt{3}$; б) 3 и $6 - \sqrt{5}$.

Решение:

$$\text{а) } 3\sqrt{5} = \sqrt{9 \cdot 5} = \sqrt{45}; \quad 5\sqrt{3} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{75}.$$

Поскольку $45 < 75$, то $\sqrt{45} < \sqrt{75}$. Значит, $3\sqrt{5} < 5\sqrt{3}$.

б) $3 - (6 - \sqrt{5}) = -3 + \sqrt{5}$. Так как $-3 + \sqrt{5}$ отрицательно ($\sqrt{5} < 3$), получаем, что $3 < 6 - \sqrt{5}$.

§3 Арифметические операции над действительными числами

Пусть $(\alpha_n)_{n \geq 0}$, $(\beta_n)_{n \geq 0}$ и $(\alpha'_n)_{n \geq 0}$, $(\beta'_n)_{n \geq 0}$, $n \in \mathbb{N}$, – последовательности десятичных приближений действительных чисел α и β с недостатком и избытком соответственно.

Сумма действительных чисел α и β – это действительное число $\gamma = \alpha + \beta$, удовлетворяющее двойному неравенству $\alpha_n + \beta_n \leq \gamma \leq \alpha'_n + \beta'_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Разность действительных чисел α и β – это действительное число $\delta = \alpha - \beta$, удовлетворяющее двойному неравенству $\alpha_n - \beta'_n \leq \delta \leq \alpha'_n - \beta_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Произведение положительных действительных чисел α и β – это положительное действительное число $\eta = \alpha \cdot \beta$, удовлетворяющее двойному неравенству $\alpha_n \cdot \beta_n \leq \eta \leq \alpha'_n \cdot \beta'_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Частное положительных действительных чисел α и β – это положительное действительное число $\mu = \frac{\alpha}{\beta}$, удовлетворяющее двойному неравенству $\frac{\alpha_n}{\beta'_n} \leq \mu \leq \frac{\alpha'_n}{\beta_n}$, $n \in \mathbb{N}$, начиная с того индекса n , для которого значения β_n , β'_n отличны от нуля.

Для нахождения произведения (частного) двух произвольных действительных чисел находим произведение (частное) их модулей, а знак устанавливаем по известному правилу.

Сумма, разность, произведение и частное (с ненулевым делителем) любых двух действительных чисел существуют и каждое из них определяется однозначно.



Что следует понимать под числом $t = \sqrt{2} \cdot \sqrt{5}$?

Решение:

Так как $1 < \sqrt{2} < 2$, $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$, $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$, ... и $2 < \sqrt{5} < 3$, $2,2 < \sqrt{5} < 2,3$, $2,22 < \sqrt{5} < 2,23$, ... то t – это число, удовлетворяющее двойным неравенствам: $1 \cdot 2 < t < 2 \cdot 3$; $1,4 \cdot 2,2 < t < 1,5 \cdot 2,3$; $1,41 \cdot 2,22 < t < 1,42 \cdot 2,23$; ... значит $2 < t < 6$; $3,08 < t < 3,45$; $3,13 < t < 3,31$; ...

Используя представление рациональных чисел в виде $\frac{a}{b}$, $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}^*$, очевидно, что сумма, разность, произведение, частное (с ненулевым делителем) двух рациональных чисел также являются рациональными числами. Отсюда следует, что сумма, разность, произведение или частное иррационального числа и ненулевого рационального числа – это иррациональное число. Действительно, если в равенстве $a + b = c$, где a рационально, b иррационально, было бы и c рационально, то из $b = c - a$ получили бы, что и b должно быть рационально. Противоречие доказывает сказанное.

Наоборот, сумма, разность, произведение, частное двух иррациональных чисел может быть рациональным числом.

Например, $2 + \sqrt{3}$, $2 - \sqrt{3} \in \mathbb{I}$, но $2 + \sqrt{3} + (2 - \sqrt{3}) \in \mathbb{Z}$, $(2 + \sqrt{3}) \cdot (2 - \sqrt{3}) \in \mathbb{Z}$.

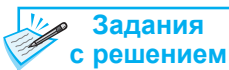
1. Покажем, что $a = (\sqrt{3} + 2 + 3\sqrt{3})\sqrt{3} + 5 - 2\sqrt{3}$ является рациональным числом.

Решение: $a = (\sqrt{3} + 2 + 3\sqrt{3})\sqrt{3} + 5 - 2\sqrt{3} = (2 + 4\sqrt{3})\sqrt{3} + 5 - 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3} + 4(\sqrt{3})^2 + 5 - 2\sqrt{3} = 12 + 5 = 17 \in \mathbb{Q}$.

2. Выясним, является ли $a = \frac{\sqrt{11-6\sqrt{2}}}{3\sqrt{5}-\sqrt{10}}$ рациональным числом.

Решение:

$a = \frac{\sqrt{11-6\sqrt{2}}}{3\sqrt{5}-\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{9-6\sqrt{2}}+2}{3\sqrt{5}-\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3^2-2 \cdot 3\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2}}{\sqrt{5}(3-\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{(3-\sqrt{2})^2}}{\sqrt{5}(3-\sqrt{2})} = \frac{|3-\sqrt{2}|}{\sqrt{5}(3-\sqrt{2})} = \frac{3-\sqrt{2}}{\sqrt{5}(3-\sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Итак, a – число иррациональное.



О Запомните!

Для оценивания суммы, разности, произведения, частного двух действительных чисел, как правило, используют десятичные приближения действительных чисел.

Свойства операций сложения и умножения действительных чисел

Для любых действительных чисел x, y, z справедливы равенства:

- 1° $x + y = y + x$; $x \cdot y = y \cdot x$ (коммутативность);
- 2° $(x + y) + z = x + (y + z)$; $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ (ассоциативность);
- 3° $x + 0 = x$; $x \cdot 1 = x$ (существование нейтрального элемента);
- 4° $x + (-x) = 0$ (существование симметричного элемента);
 $x \cdot x^{-1} = x \cdot \frac{1}{x} = 1$, $x \neq 0$ (существование противоположного элемента);
- 5° $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$; $x \cdot (y - z) = x \cdot y - x \cdot z$ (дистрибутивность);
- 6° $a > b > 0 \Rightarrow \sqrt{a} > \sqrt{b}$ и $a^n > b^n$, $n \in \mathbb{N}$.

О Вспомним

Модуль действительного числа a определяется так:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0, \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Так же, как и для рациональных чисел, можно доказать, что верна

Теорема 1

(свойства модуля действительного числа)

Для любых $a, b \in \mathbb{R}$ верно:

- 1° $|a| \geq 0$, $\forall a \in \mathbb{R}$, и $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$;
- 2° $|a| = |-a|$;
- 3° $|a| \geq a$;
- 4° $|a|^2 = |a^2| = a^2$;
- 5° $|a^n| = |a|^n$, $n \in \mathbb{N}^*$;
- 6° $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$;
- 7° $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$, $b \neq 0$;
- 8° $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$;
- 9° $|a + b| \leq |a| + |b|$;
- 10° $|a - b| \geq ||a| - |b||$.

Напомним, что для любого $x \in \mathbb{R}$ верно равенство $\sqrt{x^2} = |x|$, применимое при различных преобразованиях. Например, известное равенство $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, $a, b \in \mathbb{R}_+$, примет вид $\sqrt{ab} = \sqrt{|a|} \cdot \sqrt{|b|}$ для $a, b \in \mathbb{R}_-$.

Не следует путать с равенством $(\sqrt{x})^2 = x$, $x \in \mathbb{R}_+$.

§4 Пропорции. Проценты

Понятие пропорция отражает законы природы. Например, легко понять, что если тень человека (солнечная) в 10 раз меньше тени вертикального столба, то и рост этого человека также в 10 раз меньше высоты столба. Аналогично, если фермер собирает в 1,5 раза больше ящиков яблок, чем другой фермер, то его вознаграждение также должно быть в 1,5 раза выше вознаграждения другого фермера.

Замечаем, что в каждой из описанных ситуаций участвуют четыре величины.

определение

Равенство двух отношений называется **пропорцией**: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, $a, c \in \mathbb{R}$, $b, d \in \mathbb{R}^*$.
 Числа a и d называются **крайними членами**, а числа b и c – **средними членами** пропорции.

Основное свойство пропорции

Произведение крайних членов пропорции равно произведению средних членов:
 $a \cdot d = b \cdot c$.


**Задание
с решением**

Для покраски фасада дома готовят смесь из красок двух цветов: белого и желтого. Соотношение количества краски (белой и желтой) составляет 3 : 4. Сколько краски каждого цвета следует приобрести, если для покраски всего дома потребуется 49 кг смеси.

Решение:

Обозначим через x необходимое количество белой краски, тогда количество желтой краски равно $49 - x$.

Согласно условию, должна быть верной пропорция $\frac{3}{4} = \frac{x}{49 - x}$, то есть $3 \cdot (49 - x) = 4x$ или $7x = 3 \cdot 49$, где $x = 21$.

Таким образом, необходимо приобрести 21 кг белой краски и 28 кг желтой краски.

Ответ: 21 кг белой краски; 28 кг желтой краски.

○ Вспомним

Из пропорции $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ можно получить ряд других пропорций, называемых **производными пропорциями**, выполнив различные операции:

- замена отношения в обеих частях пропорции на их обратные выражения:

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c} \quad (\text{если } a, c \neq 0);$$

- смена местами крайних, соответственно средних членов пропорции:

$$\frac{d}{b} = \frac{c}{a}, \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d};$$

- сложение одного и того же числа с обеими частями равенства:

$$\frac{a}{b} + k = \frac{c}{d} + k \Rightarrow \frac{a + kb}{b} = \frac{c + kd}{d}.$$

В частности, при $k = 1$ получим $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$, а при $k = -1$ получим $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$.


**Задание
с решением**

Адриан укладывает 1 м² мозаичной тротуарной плитки за 2 часа, а Ион – за 3 часа. Сколько времени им понадобится, чтобы уложить 1 м² плитки, работая вместе?

Решение:

Применив пропорции, определяем объем работы, выполняемой каждым рабочим, за один и тот же промежуток времени: для решения удобно выбрать число 6 – наименьшее общее кратное чисел 2 и 3. Значит, за 6 часов Адриан уложит 3 м² плитки, а Ион – 2 м². Таким образом, работая вместе, они уложат 5 м² плитки за 6 часов. Следовательно, 1 м² покрытия они уложат за $\frac{6}{5}$ часа, или за 1 час и 12 минут.

Ответ: За 1 час и 12 минут.

Отношения такого типа используются в сфере финансов и банковского дела, предпринимательства, в повседневной жизни и т. д.

○ Вспомним

Процент – это сотая часть исходной (базовой) величины G . Для вычисления числа T , которое составляет $p\%$ от числа G , применим пропорцию $\frac{G}{T} = \frac{100}{p}$ и получим формулу:

$$T = \frac{G}{100} \cdot p.$$


**Задания
с решением**

- Из 10000 клиентов банка 10% сделали вклады на срок более одного года. Сколько таких клиентов у банка?

Решение:

Базовая (исходная) величина $G = 10\,000$, количество процентов $p = 10$, значит

$$T = \frac{10000}{100} \cdot 10 = 1000 \text{ (клиентов).}$$

Ответ: 1000 клиентов сделали вклады на срок более одного года.

- Чтобы узнать, сколько процентов p составляет число T от основной величины G , применим формулу:

$$p\% = \frac{T}{G} \cdot 100\%.$$

- Из 800 домов в городе 560 подключены к сети интернет. Сколько процентов домов не подключены к интернету?

Решение:

Имеем $G = 800$, $T = 800 - 560 = 240$.

Следовательно, $p\% = \frac{240}{800} \cdot 100\% = \frac{3}{10} \cdot 100\% = 30\%$.

Ответ: 30%.

- Чтобы найти неизвестное число (базовую величину) G , зная, что заданное число T составляет $p\%$ от G , применим формулу:

$$G = \frac{T}{p} \cdot 100.$$

О Запомните!

- Эти задачи можно решить (соответственно, эти формулы можно запомнить) используя схему: $G \dots\dots\dots 100\%$

$T \dots\dots\dots p\%$,

которое выражает тот факт, что величины T и p прямо пропорциональны количеству процентов, представленных основной величиной G , т.е. верна пропорция $\frac{G}{T} = \frac{100}{p}$. Из равенства $G \cdot p = T \cdot 100$ можно определить одну из величин, если известны остальные.

- Говоря о процентах, нужно четко понимать, какова базовая (исходная) величина. Иногда допускается ошибка, когда складываются проценты, относящиеся к разным базовым величинам.

В связи с праздниками цена на телефон снижалась дважды: сначала на 10%, а затем на 5%. На сколько процентов финальная цена ниже первоначальной цены?

Решение:

15% – неверный ответ. Аргументируем. Пусть первоначальная цена телефона a у. е. После первого снижения цена a_1 определяется из соотношения:

$$\begin{array}{rcl} a & \dots & 100\% \\ a_1 & \dots & 90\%. \end{array}$$

Значит, $a_1 = 0,9a$.

Цена a_2 после второго снижения определяется из соотношения:

$$\begin{array}{rcl} 0,9a & - & 100\% \\ a_2 & - & 95\%. \end{array}$$

Значит, $a_2 = \frac{0,9a \cdot 95}{100} = \frac{17,1a}{20} = 0,855a$ – цена телефона после второго снижения. Число процентов p , которое составляет конечная цена от первоначальной, определяется из соотношения:

$$\begin{array}{rcl} a & \dots & 100\% \\ \frac{17,1a}{20} & \dots & p\%. \end{array}$$

Следовательно, $p\% = \frac{\frac{17,1a}{20} \cdot 100\%}{a} = 85,5\%$. Таким образом, конечная цена на 14,5% ниже первоначальной.

Ответ: на 14,5%.

Проценты также широко применяются в финансовой сфере.

Задание с решением

Упражнения и задачи



Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт

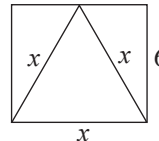
А

- Обратите в десятичное число дробь:
а) $\frac{3}{4}$; б) $\frac{4}{15}$; в) $\frac{3}{5}$; г) $\frac{1}{8}$; д) $\frac{2}{25}$; е) $\frac{1}{125}$; ж) $\frac{1}{6}$; з) $\frac{1}{9}$.
- Обратите в дробь десятичное число:
а) 0,(13); б) 2,(5); в) 1,(2); г) 0,(23); д) 1,2(7); е) 0,2(73).
- Работайте в парах!** Определите, является ли рациональным числом значение числового выражения:
а) $\sqrt{2} + 3$; б) $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$;
в) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{8} - \sqrt{12})$; г) $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} - 2\sqrt{6}$.
- Впишите в рамку число, чтобы полученное высказывание было истинным.
„ $\frac{\sqrt{64}}{2} = \boxed{}$.”
- Впишите один из знаков $<$, $>$ или $=$, чтобы полученное высказывание было истинным.
„ $\sqrt{\frac{64}{9}} \text{ } \bigcirc \text{ } \frac{3}{2}$.”
- Исследуйте!** Выясните, верно ли равенство для любого x из указанного множества:
а) $\frac{x}{|x|} = 1, x \in \mathbb{R}$; б) $x = -|x|, x \in \mathbb{R}_-$;
в) $(x - |x|)(x + |x|) = 0, x \in \mathbb{R}$.
- Дана пропорция $\frac{5}{x} = \frac{3y}{5}$. Вычислите $\left(xy - \frac{4}{3}\right)^2$.
- Могут ли числа 4, 6, 10, 15 быть членами пропорции? Обоснуйте.
- Найдите 90% от 120.
- Сахарная свекла содержит 16% сахара. Сколько килограммов свеклы потребуется, чтобы получить 100 кг сахара?

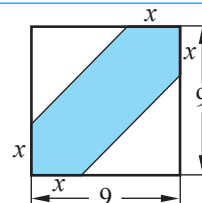


В

- Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство: а) $2x < 3x + 6$; б) $3 - 2x > 7x - 2$.
- Температура воды на поверхности океана равна 14°C , а на глубине 44 м – 2°C . Считая, что температура t воды снижается пропорционально глубине h ($t = -ah + b, a > 0$), найдите температуру воды на глубине:
а) 22 м; б) 15 м.
- Работайте в парах!** Сравните:
а) $\sqrt{11 + 4\sqrt{6}}$ и $\sqrt{6 + 5\sqrt{7}}$; б) $\sqrt{19 + 8\sqrt{3}}$ и $\sqrt{14 + 6\sqrt{5}}$.
- Найдите значение x из изображенного прямоугольника.
- Исследуйте!** Будет ли произведение $a \cdot b$ рациональным числом, если:
а) a и b рациональные числа; б) a и b иррациональные числа;
в) одно число рациональное ненулевое, а другое – иррациональное?
- Мощность P , сила тока I и сопротивление R в электрической цепи связаны соотношением: $P = I^2 \cdot R$. Какой будет сила тока, если мощность источника равна 1200 W, а сопротивление – 500 Ω ?
- Дано $\frac{x}{y} = \frac{3}{5}$. Вычислите $\frac{2x + 3y}{5y}$.
- Вычислите $(bc)^2 - 6ad$, если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ и $a \cdot d = 8$.
- Цена объекта 400 леев. Найдите новую цену объекта, если она:
а) увеличится на 20%; б) уменьшится на 20%.
- Клиент открыл депозит в банке с годовой процентной ставкой 6%. Какова будет сумма, накопленная за 2 года, если первоначальная сумма составляет 5000 у. е., а проценты по истечении одного года добавляются к первоначальной сумме?



21. Найдите значение x из рисунка, если площадь закрашенной области составляет 60% площади квадрата.
22. Покажите, что $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$, если $b > a > 0$.



23.  **Исследуйте!** Три магазина предлагают

- скидки на музыкальный центр одного и того же типа:
 а) цена равна 99 д. е. и скидка составляет 25% от цены;
 б) цена равна 111 д. е. и скидка составляет $\frac{1}{3}$ от цены;
 в) цена равна 125 д. е. и скидка составляет 50 д. е.

В каком из магазинов будет наименьшая окончательная цена?

24. Парламент Республiки Молдова состоит из 101 члена. Сколько мест будет отведено некоторой коалиции, если за нее проголосовали $\frac{2}{5}$ от общего числа избирателей?
25. Вычислите 25% от числа, которое составляет 40% от 120.
26. Цена объекта 300 леев. Какова будет окончательная цена, если она первоначально увеличится на 20%, а затем, через некоторое время, уменьшится на 20%?

С

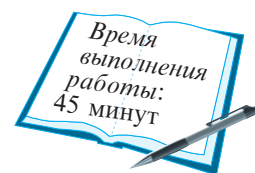
- 27*. Приведите пример иррационального числа, содержащегося между 0,62711 и 0,62712.

28. Найдите a , b , c , если $\frac{a}{5} = \frac{b}{11} = \frac{c}{9}$ и $a + b + c = 75$.

29.  **Работайте в группах! Проект:** Числа правят миром.

ИТОГОВЫЙ ТЕСТ

Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт



В заданиях 1, 2 укажите верный ответ.

1. Действительные числа x , для которых справедливо неравенство $|x| \leq |-x|$, принадлежат множеству
 А $\mathbb{R}_+$. В $\mathbb{R}_-$. С $\mathbb{R}$. D $\mathbb{R}^*$.
2. Сумма двух произвольных иррациональных чисел – это
 А рациональное число.
 В иррациональное число.
 С число, рациональность или иррациональность которого определить невозможно.
 D целое число.
3. Впишите один из знаков $<$, $>$, чтобы полученное высказывание было истинным.

„ $5\sqrt{3}$  $4\sqrt{5}$. ”

Обоснуйте!

4. Проверьте истинность высказывания: $\frac{\sqrt{12} - \sqrt{8}}{\sqrt{3} - 2\sqrt{6} + 2} = \frac{2}{3}$.

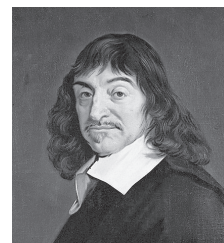
5. Какова окончательная цена объекта, если его первоначальная цена составляла 200 леев, затем цена была снижена на 20%, после чего еще раз была снижена на 20%?
6. Тень дерева в 3 раза короче его высоты. При тех же условиях длина тени столба составляет 6 м. Какова высота столба?

модуль 2

Элементы математической логики и теории множеств

Я мыслю, следовательно, существую.

Рене Декарт



Рене Декарт (1596–1650) – французский математик

Цели

- распознавание и применение в различных контекстах понятий: *высказывание, истинностное значение, квантор, теорема, гипотеза, заключение, прямая теорема, обратная теорема, аксиома, необходимые условия, достаточные условия, необходимые и достаточные условия*;
- нахождение значения истинности высказывания с использованием примеров, контрпримеров, свойств алгебраических операций;
- применение в различных ситуациях терминологии, адекватной теории множеств;
- применение отношений включения и равенства множеств, отношения принадлежности элементов некоторому множеству;
- выполнение операций над множествами; аналитическое, синтетическое, геометрическое представления полученных результатов;
- *использование в различных ситуациях основных свойств операций над множествами;
- *применение в различных ситуациях терминологии, адекватной математической индукции;
- *применение метода математической индукции при доказательстве числовых тождеств, при доказательстве некоторых высказываний.

§1 Множества

1.1. Понятие множества



Существуют математические понятия и отношения, которые не определяются. Такими являются понятия *множество*, *элемент множества* и отношение *элемент принадлежит множеству*. Эти понятия иллюстрируются примерами, разъясняются, но не могут быть определены при помощи других понятий.

Множество – это совокупность каких-либо отличных друг от друга и объединенных по некоторому признаку объектов, называемых **элементами множества**. Как правило, множества обозначаются заглавными буквами латинского алфавита, а их элементы – строчными буквами этого алфавита.

○ Вспомним

Три основных способа задания множества:

- 1) перечислением элементов множества (синтетический способ);
- 2) описанием характеристического свойства элементов (аналитический способ);
- 3) при помощи диаграммы Эйлера–Венна.

Множество, содержащее конечное число элементов, называется **конечным**. В противном случае оно называется **бесконечным**.

○ Запомните!

Число элементов конечного множества M называется **кардиналом** этого множества и обозначается $|M|$ или **card** M . Множество, не содержащее ни одного элемента, называется **пустым** множеством. Его обозначают $\emptyset$; $\text{card } \emptyset = 0$.



**Задание
с решением**

Перечислите элементы множеств (заданных с помощью характеристического свойства элементов):

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 + 3x + 1 = 0\}, \quad B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x^2 + 3x + 1 = 0\}, \quad C = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 < x \text{ и } x < 1\}.$$

Решение:

Решив уравнение $2x^2 + 3x + 1 = 0$, получим: $A = \left\{-1, -\frac{1}{2}\right\}$, $B = \{-1\}$, а множество C является пустым множеством, то есть $C = \emptyset$.

1.2. Подмножества. Равенство множеств**определение**

Множество A называется **подмножеством** множества B , если любой элемент множества A является и элементом множества B .

Обозначается: $A \subseteq B$.

Отношение $A \subseteq B$ называется **отношением включения** и читается „ A включается в B “ или „ A является подмножеством множества B “.

**определение**

Множества A и B называются **равными**, если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$.

Обозначается: $A = B$.

Равные множества состоят из одних и тех же элементов.

Примеры

1. Множества $A = \{1, 3\}$ и $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x + 3 = 0\}$ равны, так как $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$.

2. Множества $A = \{2, 3, 1, 7\}$ и $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 7\}$ не равны, поскольку множество B не является подмножеством множества A ($6 \in B$, $6 \notin A$).

Множество всех подмножеств множества A называется **булеаном множества A** и обозначается $\mathcal{B}(A)$. Булеан множества – не пустое множество (даже если $A = \emptyset$), поскольку множеству $\mathcal{B}(A)$ принадлежат по крайней мере множества A и $\emptyset$.

**теорема 1**

Если множество A содержит n , $n \in \mathbb{N}$, элементов, то множество $\mathcal{B}(A)$ содержит 2^n элементов.

О Запомните!

$$\text{card } \mathcal{B}(A) = 2^n, \text{ если } \text{card } A = n.$$

Пример

Если $A = \{o, \Delta, a\}$, то $\text{card } A = 3$;

$$\mathcal{B}(A) = \{\emptyset, \{o\}, \{\Delta\}, \{a\}, \{o, \Delta\}, \{o, a\}, \{\Delta, a\}, \{o, \Delta, a\}\}; \quad \text{card } \mathcal{B}(A) = 2^3 = 8.$$

1.3. Операции над множествами**О Вспомним****Объединение множеств****определение**

Объединением двух множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A , B .

Объединение множеств A и B обозначается $A \cup B$ и читается „ A в объединении с B “. Следовательно, $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$ (рис. 2.1 а) – заштрихованная часть).

2 Пересечение множеств

Определение

Пересечением двух множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих как множеству A , так и множеству B .

Пересечение множеств A и B обозначается $A \cap B$ и читается „ A в пересечении с B “. Следовательно, $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$ (рис. 2.1 б) – заштрихованная часть).

Множества A и B называются *непересекающимися*, если $A \cap B = \emptyset$, то есть, если у них нет общих элементов.

3 Разность двух множеств

Определение

Разностью двух множеств A и B (в этом порядке) называется множество, состоящее из всех элементов множества A , не принадлежащих множеству B .

Разность множеств A и B обозначается $A \setminus B$ или $A - B$ и читается „ A минус B “. Следовательно, $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$ (рис. 2.1 в) – заштрихованная часть).

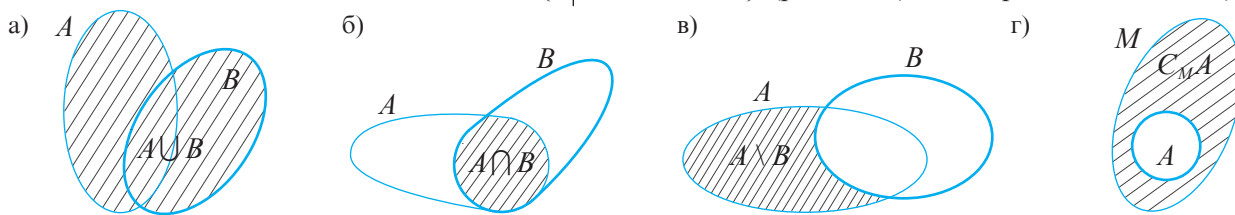


Рис. 2.1

Если $A \subseteq M$, то $M \setminus A$ называется *дополнением подмножества A до множества M* и обозначается $C_M A$ (рис. 2.1 г).

4 Декартово произведение

Определение

Декартовым произведением непустых множеств A и B называется множество упорядоченных пар (x, y) , где $x \in A$, $y \in B$.

Декартово произведение множеств A и B обозначается $A \times B$ и читается „ A умноженное на B “.

Следовательно, $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$.

Примеры

1. Если $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b, c\}$, то $A \cup B = \{1, 2, a, b, c\}$, $A \cap B = \emptyset$, $B \setminus A = \{a, b, c\}$.

$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$, а

$B \times A = \{(a, 1), (b, 1), (c, 1), (a, 2), (b, 2), (c, 2)\}$.



2. Декартово произведение $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ играет важную роль в математике, физике и в других областях. Пары координат точек прямоугольной системы координат представляют собой элементы декартова произведения $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (смотри изображение).

3. Декартово произведение множеств $M_1 = [1, 2]$, $M_2 = [0, 3]$ геометрически представляет собой точки прямоугольника с вершинами в точках $A = (1, 0)$, $B = (1, 3)$, $C = (2, 3)$, $D = (0, 2)$.

Очевидно, что в общем случае $A \times B \neq B \times A$ (смотри пример 1).

5 Свойства операций над множествами

Операции над множествами обладают рядом свойств. Некоторые из них подобны свойствам операций сложения и умножения действительных чисел.

Теорема 2

Для любых множеств A, B, C справедливы равенства:

$$1^\circ A \cup B = B \cup A;$$

$$1^\circ A \cap B = B \cap A;$$

$$2^\circ A \cup A = A;$$

$$2^\circ A \cap A = A;$$

$$3^\circ A \cup \emptyset = A;$$

$$3^\circ A \cap \emptyset = \emptyset;$$

$$4^\circ (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C);$$

$$4^\circ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C);$$

$$5^\circ * A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$$

$$5^\circ * A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C);$$

$$6^\circ * A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C).$$

$$6^\circ * A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C).$$

Задания с решением

1. Покажем, что $A \cup B = B$, если $A \subseteq B$.

Решение:

Очевидно, что $B \subseteq A \cup B$. Указанное равенство будет верным, если покажем обратное включение: $A \cup B \subseteq B$.

Пусть $x \in A \cup B$. Тогда $x \in A$ или $x \in B$. Если $x \in A$, то $x \in B$ (из условия $A \subseteq B$). Таким образом, $x \in B$, что влечет $A \cup B \subseteq B$, поэтому $A \cup B = B$.

2. Найдем объединение множеств $A = \mathbb{Z}_-$, $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 100\}$, $C = \mathbb{Z}_+$.

Решение:

На основании свойств 1° , 4° получим:

$$M = A \cup (B \cup C) = A \cup (C \cup B) = (A \cup C) \cup B = (\mathbb{Z}_- \cup \mathbb{Z}_+) \cup B.$$

Так как $\mathbb{Z}_- \cup \mathbb{Z}_+ = \mathbb{Z}$ и $B \subseteq \mathbb{Z}$, то $M = \mathbb{Z} \cup B = \mathbb{Z}$.

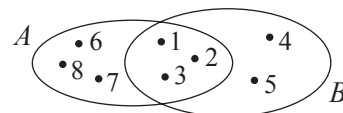
Упражнения и задачи



Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт

А

- а) Определите элементы множества A , зная, что это натуральные числа меньше 50, которые делятся на 4.
б) Найдите кардинал множества A .
- Пусть $X = \{x \mid x \text{ буква в слове „материнство“}\}$.
а) Перечислите элементы множества X .
б) Представьте множество X в виде диаграммы.
в) Найдите кардинал множества X .
- Зная, что $A \subset \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ и $\text{card } A = 5$, найдите множество A . Сколько множеств A существует?
- Даны множества:
а) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2x - 3 = 0\}$ и $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$; б) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - 1 > 0\}$ и $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x + 1 < 0\}$.
Определите, равны ли множества A и B и определите множества $A \cup B$, $A \cap B$.
- Множества A и B представлены на диаграмме.
Найдите:
а) $A \cup B$; б) $A \cap B$; в) $A \setminus B$; г) $B \setminus A$.
- а) Запишите все подмножества множества $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, которые содержат множество $B = \{1, 3\}$.
б) Найдите $C_A B$.
- Исследуйте!** Выясните, равны ли множества:
а) $\{1, -1\}$ и $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 = 0\}$; б) $\{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 7\}$ и $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.



8.  **Работайте в парах!** Даны множества $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ и $B = \mathbb{N}$.

Найдите множество:

- а) $A \cup B$; б) $A \cap B$; в) $A \setminus B$; г) $B \setminus A$; д) $C_B A$.

9. Найдите кардинал булеана множества:

- а) $A = \{1, 2, 3\} \cup \{2, 4, 6\}$; б) $B = \{1, 2, 3\} \cap \{2, 4, 6\}$.

В

10. Найдите три числа, удовлетворяющих условиям:

- а) $a \in \mathbb{Z}$ и $a \notin \mathbb{N}$; б) $a \in \mathbb{Z}$ и $|a| < 5$.

11. Определите, каким из множеств $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}, \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ принадлежит:

- а) 2; б) $\sqrt{17}$; в*) значение выражения $(2 - \sqrt{3})^2 + 4\sqrt{3}$.

С

12. Найдите декартово произведение $A \times B$ множеств A, B , если:

- а) $A = \{2, 4, 6\}, B = \{1, 3\}$; б) $A = \{a, b, c\}, B = \{x, y, z\}$.

Верно ли, что $A \times B \neq B \times A$? Обоснуйте.

13.  **Исследуйте!** Даны множества натуральных чисел: $A = \{x+7, 2x-5, 3x+1\}$ и $B = \{2x+3, x+9, 4x-13\}$, $x \in \mathbb{N}$. Существуют ли натуральные значения x , для которых $A = B$? Найдите эти значения, если они существуют.

Реальный профиль

A₁

1.  **Исследуйте!** Проверьте, равны ли множества $\{\sqrt{2}\}$ и $\{x \in \mathbb{R}_+ \mid x^2 - 2 = 0\}$.

2. Даны множества $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x - 3 \geq 0\}$ и $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 36 < 0\}$.

Найдите множество:

- а) $B \setminus A$; б) $A \setminus B$; в) $A \cup B$; г) $A \cap B$.

3. Найдите $\text{card } A$, булеан множества A , $\text{card } \mathcal{B}(A)$, если $A = [0, 4) \cap \mathbb{Z}$.

B₁

4. Найдите все действительные числа a , удовлетворяющие условиям:

- а) $a \in \mathbb{R}$ и $a \notin \mathbb{Q}$; б) $a \in \mathbb{N}$ и $2 < |a| < 10$.

5.  **Работайте в парах!** Определите, каким из множеств $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}, \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ принадлежит число:

- а) $-\sqrt{2}$; б) $|\sqrt{3} - 2| - \sqrt{3}$; в) $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} - \sqrt{5}$.

C₁

6. Даны множества A, B, C . Докажите равенство:

- а) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$; б) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

7. Найдите множество действительных значений m , при которых истинно высказывание:

- а) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + m = 0\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x + 4 = 0\} = \emptyset$.

- б) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x - 4 \leq 0\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - m < 0\} = \emptyset$.

- 8*.  **Исследуйте!** Даны множества A, B, C . Найдите истинностное значение высказывания:

- а) Если $C \cup A = C \cup B$, то $A = B$. б) Если $C \cap A = C \cap B$, то $A = B$.

Приведите примеры таких множеств.

§2 Элементы математической логики

2.1. Понятие высказывания. Повторение и дополнения

○ Вспомним

Задача

Рассмотрим повествовательные предложения:

1. Город Кишинев является столицей Республики Молдова. 2. $3x^2 - x = 0$.

3. Любой квадрат является ромбом. 4. $\sqrt{3} = 3$.

а) Выясните, какие из этих предложений являются высказываниями. Обоснуйте ответ.

б) Найдите истинностное значение каждого высказывания.

В математической логике **высказыванием** называется предложение, о котором имеет смысл говорить, **истинно** оно или **ложно**. Высказывания обозначаются строчными буквами латинского алфавита: $a, b, \dots, p, q, \dots$

В нашей задаче предложения 1, 3, 4 являются высказываниями, так как можно определить истинны они или ложны: предложения 1 и 3 являются истинными высказываниями, а предложение 4 – ложным. Истинностное значение предложения 2, $3x^2 - x = 0$, невозможно определить, так как, например, для $x = 0$ получается истинное высказывание, а для $x = 1$ – ложное высказывание; однако значение x не известно.

3 замечание

В отличие от равенства 2 существуют равенства (неравенства), содержащие переменные и являющиеся тем не менее высказываниями, так как они обращаются в верные числовые равенства (неравенства) для любых значений переменных из некоторой области.

Примерами могут служить свойства операций над действительными числами: $x + 0 = 0 + x$, $x \cdot y = y \cdot x$, $x, y \in \mathbb{R}$, и др.

С помощью логических связок „и“, „или“, „не“ („поп“), „если..., то“ из высказываний p, q можно образовать (*составные*) высказывания: „ p и q “, „ p или q “, „поп p “ и т. д. Например, используя истинные высказывания p : „2 – натуральное число“, q : „–3 – целое число“, можно составить истинное высказывание: „число 2 является натуральным числом и –3 является целым числом“, „ $\sqrt{3}$ не является рациональным числом“.

В продолжение займемся другой классификацией высказываний: *частные высказывания, общие высказывания*. Рассмотрим высказывания:

1. Число 171 кратно 3.
2. Любое целое число кратно 3, если сумма цифр в его десятичной записи делится на 3.
3. Число 2 является решением уравнения $x^2 - 3x + 2 = 0$.
4. Любому правильному многоугольнику можно описать окружность.

По степени общности высказывания 1 и 3 относятся к частным случаям, являются **частными высказываниями**, а высказывания 2 и 4 носят общий характер, касаются произвольного элемента некоторого множества (являются **общими высказываниями**). Общие высказывания могут быть сформулированы более компактно, если использовать **квантор общности** ($\forall$) (читают „для любого“) или **квантор существования** ($\exists$) (читают „существует“). Например, высказывание „Для любого действительного числа x выполняется условие $x^2 + 1 \geq 0$ “ записывается ($\forall x \in \mathbb{R}$) ($x^2 + 1 \geq 0$).

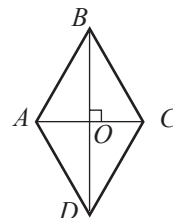
Высказывание „Существует правильный многоугольник, внутренние углы которого равны 110° “ можно записать ($\exists x \in M$) (его внутренние углы x равны 110°), где M – множество всех правильных многоугольников плоскости.

Особое место среди математических высказываний занимают теоремы и аксиомы. **Теоремы** – это общие высказывания, требующие, как правило, доказательства, т. е. строгого обоснования того, что они верны. В процессе доказательства используются другие истинные высказывания, из которых одни являются теоремами (уже доказанными), а другие могут быть аксиомами. **Аксиомы** – это высказывания, которые считаются верными без доказательства (их невозможно доказать). Они обозначают некие условия, свойства (возможно, общепризнанные) для понятий, изучаемых в рамках строго построенных теорий. Например, аксиомами являются высказывания: „Две различные точки определяют прямую, и притом только одну“, „Через любую точку вне прямой можно провести единственную прямую, параллельную данной“.

Большинство математических теорем имеют один из видов: „Если A , то B “ или „ A , если и только если B “ („ A тогда и только тогда, когда B “, „ A в том и только в том случае, когда B “) (или могут быть так сформулированы), где A , B обозначают некоторые **условия**, касающиеся математических понятий.

Примеры

1. Если четырехугольник является ромбом, то его диагонали перпендикулярны.
2. Целое число a кратно 5, если и только если его последняя (справа) цифра в десятичной записи равна 0 или 5.



В теоремах/высказываниях вида „Если A , то B “ условие A называется **достаточным условием** (для B), а B – **необходимым условием** (для A). В теоремах вида „ A , если и только если B “ условия A , B называются **эквивалентными условиями** или **необходимыми и достаточными условиями**, т. е. A является необходимым и достаточным условием для B , а B – необходимым и достаточным условием для A .

3. В теореме „Если натуральное число кратно 6, то оно кратно 2“ условие „натуральное число кратно 6“ является достаточным условием для условия „натуральное число кратно 2“, которое, в свою очередь, является необходимым условием для первого условия.

4. В теореме из примера 2 условия „целое число кратно 5“ и „последняя (справа) цифра в десятичной записи целого числа равна 0 или 5“ эквивалентны.

Любая теорема содержит следующие структурные составляющие: **разъяснительная часть**, **условие**, **заключение**.

Разъяснительная часть теоремы определяет множество объектов, о которых идет речь в теореме. Иногда разъяснительная часть присутствует явно, а иногда – неявно.

Любая теорема вида „Если A , то B “ может быть записана в виде

$$(x \in M)(A(x) \Rightarrow B(x)),$$

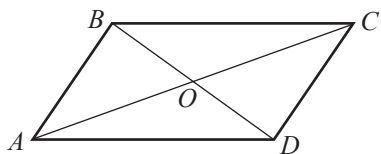
где $x \in M$ – разъяснительная часть, $A(x)$ – условие, $B(x)$ – заключение.

5. Рассмотрим теорему: „Пусть p – выпуклый четырехугольник в плоскости α . Если p является ромбом, то его диагонали перпендикулярны“.

Разъяснительная часть теоремы – это „ p – выпуклый четырехугольник в плоскости α “, условие теоремы – „ p является ромбом“, заключение – „диагонали четырехугольника перпендикулярны“.

Поменяв местами условие и заключение теоремы „Если A , то B “, получим другое высказывание: „Если B , то A “, названное **обратным** исходной теореме, которое может быть истинным (новая теорема) или ложным. Если высказывание „Если B , то A “ истинно, то исходная теорема называется **прямой теоремой**, а обратная к ней – **обратной теоремой**. Обратная теорема записывается $(x \in M)(B(x) \Rightarrow A(x))$.

6. Обратной для теоремы „Если целое число a кратно 6, то оно кратно 2“ является „Если целое число a кратно 2, то оно кратно 6“, но данное высказывание ложно. Это можно проверить с помощью *контрпримера*: число 4 кратно 2, но оно не кратно 6.



7. Обратной для теоремы „Если точка пересечения диагоналей четырехугольника делит их пополам, то этот четырехугольник – параллелограмм“ является „Если четырехугольник – параллелограмм, то его диагонали точкой пересечения делятся пополам“ – и это истинное высказывание.

Если для теоремы „Если A , то B “ верна и ей обратная, то условия A и B эквивалентны, следовательно, верна теорема „ A , если и только если B “. Таким образом, прямая и обратная теоремы из примера 7 могут быть сформулированы в виде одной теоремы: „Четырехугольник является параллелограммом, если и только если его диагонали точкой пересечения делятся пополам“. То есть $(x \in M)(A(x) \Leftrightarrow B(x))$.

В гимназическом курсе математики применялся *метод доказательства от противного* теорем вида „Если A , то B “. Он состоит в следующем: предполагая, что заключение теоремы ложно, логическими выводами получаем противоречие (либо с условием теоремы, либо с другим истинным высказыванием). Отсюда следует, что исходное предположение ложно, следовательно, верно утверждение теоремы.

Пример

Методом от противного докажем высказывание „Если целое число a не кратно 3, то оно не кратно 6“. Предполагая обратное, что a кратно 6, покажем, что a кратно 3. Действительно, так как число a кратно 6, то его можно записать в виде $a = 6t$, $t \in \mathbb{Z}$, или $a = 3 \cdot (2t)$, $2t \in \mathbb{Z}$. Следовательно, a кратно 3, что противоречит гипотезе. На основе метода от противного получаем, что первоначальное высказывание истинно.

Другой метод доказательства некоторых высказываний излагается в пункте 2.2.

2.2. Математическая индукция

Процедуры получения частных высказываний из общих, или наоборот, применяются часто, так как любая математическая (и не только) теория строится дедуктивным методом: все высказывания (теоремы) выводятся из других, истинных высказываний.

Логический вывод, с помощью которого из общих высказываний получают частные высказывания, называется *дедукцией*.

Пример

Высказывание „Любое уравнение II степени с действительными коэффициентами, у которого дискриминант неотрицателен, имеет действительные решения“ является общим высказыванием, так как речь идет о произвольном элементе множества уравнений II степени с действительными коэффициентами и с неотрицательным дискриминантом.

Высказывание „Уравнение $2x^2 + x - 5 = 0$ имеет действительные решения“ относится к конкретному элементу упомянутого множества, поэтому оно является частным высказыванием.

Пусть $P(x)$ – высказывание, относящееся к произвольному элементу x , $x \in M$. Если истинно общее высказывание $(\forall x \in M)P(x)$, то при помощи дедукции из него получаем частные истинные высказывания: $P(a)$ для $x = a$.

Истинные высказывания можно получить, используя *индукцию*. С помощью индукции можно получить общие высказывания из частных высказываний. Применяют *неполную индукцию*, когда общее высказывание формулируется на основе *некоторых* частных случаев, и *полную индукцию*, когда общее высказывание формулируется на основе рассмотрения *всех* возможных частных случаев.

С помощью неполной индукции можно получить общие высказывания, которые могут быть истинными, а могут быть и ложными. Однако с помощью полной индукции получают общие высказывания, которые обязательно являются истинными.

Пример

Рассмотрим истинные частные высказывания „ $1+2 < 11$ “ и „ $1+3 < 11$ “. На их основе можно сформулировать несколько общих высказываний:

p : „Сумма любых двух натуральных чисел меньше 11“;

q : „Сумма любых двух натуральных чисел, меньших 4, меньше 11“.

Высказывание p ложно, а высказывание q истинно, что можно проверить, рассмотрев все частные высказывания:

$$1+1 < 11, 1+2 < 11, 1+3 < 11, 2+2 < 11, 2+3 < 11, 3+3 < 11.$$

Еще один способ доказательства общих высказываний (теорем) – это *метод математической индукции*.

Если для предложения $P(n), n \in \mathbb{N}$, истинно частное высказывание $P(0)$ (или $P(m)$, где m – натуральное заданное число) и из предположения, что истинно высказывание $P(k) (k > m)$ следует, что истинно высказывание $P(k+1)$, то истинно общее высказывание $(\forall n \in \mathbb{N})P(n)$ (соответственно $n \geq m$).

Заметим, что этот метод применим только к высказываниям, суть которых зависит от натуральных чисел. Доказательство методом математической индукции высказывания $(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq m)P(n)$ осуществляется в три этапа:

1. Проверяем истинность высказывания $P(m)$.
2. Предполагаем, что высказывание $P(k), k \geq m$, истинно, и доказываем истинность высказывания $P(k+1)$.
3. Если оба этапа доказательства проверены, то истинно высказывание $(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq m)P(n)$.



Задание с решением

Используя метод математической индукции, покажите, что для любого ненулевого натурального числа n верно равенство:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Решение:

Используя квантор общности, это общее высказывание может быть записано в виде $(\forall n \in \mathbb{N}^*)P(n)$, где $P(n)$ обозначает „ $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ “.

Последовательно пройдем этапы метода математической индукции.

1. Для $n = 1$ получаем частное высказывание $1 = \frac{1(1+1)}{2}$, и оно истинно.

2. Предположим, что для некоторого натурального k истинно частное высказывание $P(k): 1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$. Используя это равенство, проверим верность равенства $P(k+1): 1 + 2 + \dots + k + (k+1) = \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}$.

Поступим следующим образом:

$$(1 + 2 + \dots + k) + (k + 1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}.$$

Следовательно, высказывание $P(k+1)$ истинно.

3. На основании метода математической индукции заключаем, что равенство

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ верно для любого } n \in \mathbb{N}^*.$$

Упражнения и задачи



Реальный профиль

A₁

- Исследуйте!** Выявите, какие из следующих предложений являются высказываниями и найдите их истинностные значения.
 - Температура кипения воды при атмосферном давлении 760 мм ртутного столба равна 110°C.
 - Четырехугольник $ABCD$ является квадратом.
 - Морская вода не имеет тот же удельный вес, что и дистиллированная вода.
- Исследуйте!** Найдите истинностное значение высказывания:
 - $(\forall x \in M)$ (величины углов при основании равнобедренного треугольника равны 30°), где M множество всех равнобедренных треугольников некоторой плоскости.
 - $(\exists x \in U)$ (величины x внутренних углов треугольника не превышают 50°), где U множество равносторонних треугольников некоторой плоскости.
 - $(\exists x \in \mathbb{Z}) (x^2 - x - 1 = 0)$.
 - $(\forall x \in \mathbb{R}) (x^2 - x - 2 = 0)$.
- Сформулируйте частные высказывания, полученные из общего высказывания:
 - Любое натуральное число, кратное 10, кратно 5.
 - Сумма величин внутренних углов выпуклого n -угольника равна $180^\circ(n-2)$.
- Работайте в парах!** Найдите структурные компоненты:
 - теоремы Пифагора;
 - теоремы „Величина внутренних углов равностороннего треугольника равна 60°“.

n/n

B₁

- Исследуйте!** Найдите истинностное значение высказывания:
 - Температура кипения воды в горах (около 900 м над уровнем моря) меньше 100°C.
 - $\sqrt{725} \in \mathbb{Q}$.
- Исследуйте!** Найдите истинностное значение высказывания:

а) $(\exists x \in \mathbb{N}) (x^2 - x - 2 = 0)$.	б) $(\exists x \in \mathbb{R}) (x^2 - x - 2 = 0)$.
в) $(\exists x \in \mathbb{R}) (x+2 + x+3 = 0)$.	г) $(\forall x \in \mathbb{R}) (x+2 + x^2 - x + 1 > 0)$.
- Рассмотрим теорему: „Если четырехугольник $ABCD$ – ромб, то его диагонали перпендикулярны“. Сформулируйте высказывание, обратное этой теореме, и найдите его истинностное значение.
- Применяя метод математической индукции, докажите, что для любого n , $n \in \mathbb{N}^*$, истинно высказывание:

а) $1 + 2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$.	б) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$.
в) $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.	г) $1^2 + 3^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$.
д) $(7^n + 3n - 1) : 9$;	е) $(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3) (2^n > n^3)$.

n/n

n/n

9. Рассмотрим теорему „Если числа a, b рациональны, то сумма $a + b$ является рациональным числом“. Сформулируйте высказывание, обратное этой теореме, и найдите его истинностное значение.

C₁

10. Применяя метод доказательства от противного, докажите, что истинно высказывание „Если целое число a не кратно 2, то оно не кратно 10“.

- 11*.  **Исследуйте!** Найдите истинностное значение высказывания:

- а) Существует правильный многоугольник, внутренние углы которого равны 110° .
б) Цифра единиц числа 7^{162} равна 3.



Упражнения и задачи на повторение



Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт

A

1. Даны множества $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 3, 5, 9\}$. Найдите $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \times B$.

2.  **Исследуйте!** Выявите, какие из следующих предложений являются высказываниями, и найдите их истинностные значения.

- а) $\sqrt{3}$ – действительное число.
б) Удельный вес льда меньше удельного веса воды.
в) В древнегреческой мифологии Афина является богиней мудрости.
г) Организация Объединенных Наций (ООН) была основана в 1945 г. для установления во всех странах общественного строя одинаковой ориентации.
д) Египетские пирамиды были построены в XVI веке.
е) Солнечная система состоит из 6 планет.
ж) $(\exists x \in \mathbb{R}) (|x + 2| < 2)$.
з) $(\forall x \in \mathbb{R}) (|x + 2| < 2)$.



B

3. Найдите множества $A \cup B$, $A \cap B$, если $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x+1)^2(x-5)^2 \leq 0\}$ и $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -3\}$.
4. Пусть S_1 , S_2 – множества решений на $\mathbb{R}$ уравнений $x^2 - 5x - 6 = 0$ и $\sqrt{x-6} \cdot (x^3 - 1) = 0$ соответственно. Найдите: а) $S_1 \cup S_2$; б) $S_1 \cap S_2$; в) $S_1 \setminus S_2$; г) $S_2 \setminus S_1$; д) $S_1 \times S_2$.

C

5. Определите булеан множества $A = [-2, 3) \cap \mathbb{Z}$.
6. Приведите примеры множеств A , B , для которых $A \cup B = B \cap A$.

Реальный профиль

A₁

1. В классе 28 учеников, и все они посещают либо волейбольную, либо баскетбольную секцию, либо обе секции. Сколько учеников посещают обе секции, если волейбольную секцию посещают 12 учеников, а баскетбольную – 20 учеников?
2. Сформулируйте такую теорему, чтобы обратное ей высказывание было истинным.
3. Найдите необходимое и достаточное условие теоремы; сформулируйте обратное ей высказывание и найдите его истинностное значение:
а) Если целое число a кратно 14, то оно кратно 7.
б) Если треугольник прямоугольный, то у него два острых угла.

В₁

4. Даны множества $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 6x - 7 < 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 36 \leq 0\}$. Найдите:

- а) $A \cup B$; б) $A \cap B$; в) $A \setminus B$; г) $B \setminus A$.

5.  **Исследуйте!** Найдите истинностное значение высказывания:

- а) $(\forall x \in \mathbb{R}) (x^2 - x + 1 > 0)$. б) $(\exists n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}) (n \mid 3 \text{ и } n \mid 7)$.

н/п

6. Проверьте истинностное значение высказывания: $A = B \Leftrightarrow ((A \cap B) = (A \cup B))$.

С₁

7.  **Исследуйте!** Найдите истинностное значение высказывания:

- а) Для любого натурального n дробь $\frac{n}{n+1}$ несократима.

- б) $(\exists x \in \mathbb{R}) (\sqrt{2}x^2 - \sqrt{3}x + 1 < 0)$.

н/п

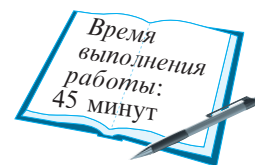
8. Покажите, что истинно высказывание:

Для любых рациональных чисел a, b , $a < b$, существует по крайней мере одно рациональное число c такое, что $a < c < b$.

9. Применив метод математической индукции, докажите неравенство $2^n > n^2$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 5$.

ИТОГОВЫЙ ТЕСТ

Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт



1. Дано множество $X = \{x \mid x \text{ буква в слове „ответственность“}\}$.

Найдите истинностное значение высказывания: „ $\text{card } X = 12$ “.

н/п

2. Даны множества $A = \{0; 2; 3; 6\}$ и $B = \{2; 3; 7; 12\}$. Выясните, какое из множеств

$M_1 = \{2; 3\}$, $M_2 = \{2; 3; 6\}$, $M_3 = \{0; 2; 3; 6; 7; 12\}$, $M_4 = \{0; 6\}$, $M_5 = \{7; 12\}$, $M_6 = \{0; 6; 7; 12\}$ равно множеству:

- а) $A \cup B$; б) $A \cap B$; в) $B \setminus A$.

3. Пусть S_1, S_2 – множества решений на $\mathbb{R}$ уравнений $x^2 + 2x - 3 = 0$ и $(x - 3)(x^3 - 1) = 0$ соответственно. Найдите: а) $S_1 \cup S_2$; б) $S_1 \cap S_2$; в) $S_2 \setminus S_1$; г) $S_1 \setminus S_2$.

4. Пусть A, B – множества из задания 2. Найдите множество $S = A \times B$ и $\text{card } B(S)$.

Реальный профиль

1. Даны множества $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{a; b\}$.

- а) Заполните: $\text{card } B(A) = \square$; $\text{card } B(B) = \square$.

- б) Найдите множество $C = A \times B$ и его кардинал.

2. Выясните, является ли предложение „Выпуклый четырехугольник имеет 3 диагонали“ высказыванием, и, в случае утвердительного ответа, найдите его истинностное значение.

3. Приведите пример множеств, подтверждающих, что равенство $A \setminus B = B \setminus A$ неверно.

4. Дана теорема „Если четырехугольник является ромбом, то в нем можно вписать окружность“.

- а) Укажите необходимое условие, достаточное условие.

- б) Сформулируйте высказывание, обратное теореме, и найдите его истинностное значение.

5. Используя метод математической индукции, докажите, что: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Каждый день учит нас чему-то новому.

Еврипид

Цели

- выполнение операций с действительными числами: сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень с рациональным или действительным показателем; действий с корнями n -й степени, $n \in \mathbb{N}$, $n \in \{2, 3\}$, с логарифмами положительных действительных чисел;
- применение свойств степеней, радикалов, логарифмов при выполнении вычислений с действительными числами.

§1 Корни

1.1. Понятие корня. Свойства

○ Вспомним

Известно, что n -я степень действительного числа b с натуральным ненулевым показателем n , обозначенная b^n , – это произведение n множителей, равных b . Следовательно, при заданном основании b и показателе n находим значение степени $b^n = a$.

В гимназии мы рассмотрели одну из обратных задач: если известно a – значение степени и показатель степени n , $n = 2$, то можно найти основание b , для которого $b^2 = a$. Таким образом, решение уравнений II степени привело к введению понятия *квадратного корня*. Именно неотрицательное решение уравнения $x^2 = a$, $a \geq 0$, обозначается через $\sqrt{a}$ и называется *квадратным корнем*, или *корнем второй степени* из a .

Многие задачи приводят к решению уравнений степени больше, чем 2.

Например, необходимо определить длину ребра куба, если его объем равен: а) 8 м^3 ; б) 5 м^3 .

В случае а) длина ребра равна 2 м, потому что $2^3 = 8$. В случае б) на множестве $\mathbb{Q}$ не существует точного значения длины ребра, так как не существует рационального числа x , для которого $x^3 = 5$. Решение этого уравнения обозначается через $\sqrt[3]{5}$, и является *корнем третьей степени* (кубическим корнем) из числа 5.

○ определение

- Действительное число b называется **корнем нечетной n -й степени**, $n \in \mathbb{N}^*$, $n > 1$, из действительного числа a , если $b^n = a$.
- Неотрицательное действительное число b называется **корнем четной n -й степени**, $n \in \mathbb{N}^*$, $n > 1$, из неотрицательного действительного числа a , если $b^n = a$.

Корень n -й степени из числа a обозначают $\sqrt[n]{a}$. Значит, $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$, $a, b \in \mathbb{R}$, $n = 2k + 1$, и $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$, $a, b \in \mathbb{R}_+$, $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Например, $\sqrt{0,25} = 0,5$; $\sqrt[3]{-0,125} = -0,5$; $\sqrt[4]{-16}$ не существует; $\sqrt[n]{0} = 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

○ Запомните!

Применив свойства числовых неравенств и десятичные приближения чисел, можно доказать, что при указанных в определении условиях значение корня однозначно определено.

Корень n -й степени из числа a вычисляем на основании определения, то есть находим действительное решение уравнения вида $x^n = a$, $a \in \mathbb{R}$, $n = 2k + 1$, или неотрицательное решение уравнения $x^n = a$, $a \in \mathbb{R}_+$, $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}^*$. Решением данного уравнения может быть либо рациональное число, либо иррациональное число, поэтому (при необходимости) находим его десятичные приближения при помощи калькулятора, либо поступая как в следующей задаче.

Задача

Вычислим десятичные приближенные значения с недостатком и избытком для числа $\sqrt[3]{2}$ с точностью до 10^{-2} .

Решение:

Из двойного неравенства $1^3 < 2 < 2^3$ получаем, что $1 < \sqrt[3]{2} < 2$, то есть 1 и 2 являются приближенными значениями числа $\sqrt[3]{2}$ с недостатком и избытком соответственно с точностью до 1. Рассмотрим кубы чисел от 1 до 2 с шагом 0,1: $1,1^3$; $1,2^3$; ...; $1,9^3$; 2^3 . Заметим, что число 2 содержится между числами $1,2^3 = 1,728$ и $1,3^3 = 2,197$; значит, $1,2 < \sqrt[3]{2} < 1,3$. Так как $1,3 - 1,2 = 10^{-1}$, следует, что числа 1,2 и 1,3 – это приближенные значения числа $\sqrt[3]{2}$ с недостатком и избытком соответственно с точностью до 10^{-1} .

Рассмотрим кубы чисел от 1,21 до 1,29 с шагом 0,01: $1,21^3$; $1,22^3$; ...; $1,29^3$. Так как $1,953125 = 1,25^3 < 2 < 1,26^3 = 2,00376$, то $1,25 < \sqrt[3]{2} < 1,26$, то есть 1,25 и 1,26 – приближенные значения числа $\sqrt[3]{2}$ с недостатком и избытком соответственно с точностью до 10^{-2} .

Теорема 1**(свойства радикалов)**

Для любых $a, b \in \mathbb{R}_+$ и четного натурального ненулевого n или для любых $a, b \in \mathbb{R}$ и нечетного натурального n , $k, p, s \in \mathbb{N}^*$, имеем:

$$1^\circ (\sqrt[n]{a})^n = a;$$

$$2^\circ \sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b};$$

$$3^\circ (\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k};$$

$$4^\circ \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \quad b \neq 0;$$

$$5^\circ \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}, \quad k \geq 2;$$

$$6^\circ \sqrt[np]{a^{nk}} = \sqrt[n]{a^k}, \quad p \geq 2, a \in \mathbb{R}_+;$$

$$7^\circ a > b \geq 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b};$$

$$8^\circ \sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|, \quad \sqrt{a^2} = |a|;$$

$$9^\circ \sqrt[2k]{ab} = \sqrt[k]{|a|} \cdot \sqrt[k]{|b|}, \quad a \cdot b \in \mathbb{R}_+;$$

$$10^\circ \sqrt[2k]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[k]{|a|}}{\sqrt[k]{|b|}}, \quad a \cdot b \in \mathbb{R}_+, \quad b \neq 0;$$

$$11^\circ \sqrt[2kp]{a^{2ks}} = \sqrt[p]{|a^s|}, \quad a \in \mathbb{R}, \quad p \geq 2.$$

1.2. Преобразования иррациональных выражений

1 Вынесение множителя из-под знака корня, внесение множителя под знак корня

**Задание с решением**

Упростим выражение $\sqrt[3]{7^4 - 7^3} \cdot 5$.

Решение:

$$\sqrt[3]{7^4 - 7^3} \cdot 5 = \sqrt[3]{7^3(7 - 5)} = \sqrt[3]{7^3} \cdot \sqrt[3]{2} = 7 \cdot \sqrt[3]{2}.$$

Если степень корня четная и под знаком корня содержатся переменные, то могут быть использованы свойства 8° – 11° .

**Замечание**

Было бы ошибочным применить свойства 1° – 7° , если не известны знаки значений множителей, то есть является неверной запись вида:

$$\sqrt{x^7(x^2 - 5)} = \sqrt{x^7} \cdot \sqrt{x^2 - 5}.$$

Действительно, областью допустимых значений (ОДЗ) выражения левой части равенства является множество $[-\sqrt{5}, 0] \cup [\sqrt{5}, +\infty)$, а ОДЗ выражения правой части равенства является множество $[\sqrt{5}, +\infty)$. Значит, при $x \in [-\sqrt{5}, 0]$ равенство неверно.

При внесении множителя под знак радикала могут быть допущены ошибки следующих видов:

$$\text{а) } -7\sqrt{2} = \sqrt{(-7)^2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{98}; \quad \text{б*) } x \cdot \sqrt{\frac{y}{x^2}} = \sqrt{\frac{x^2 y}{x^2}} = \sqrt{y}.$$

$$\text{Правильное решение: а) } -7\sqrt{2} = -\sqrt{98}; \quad \text{б*) } x \cdot \sqrt{\frac{y}{x^2}} = \begin{cases} \sqrt{y}, & \text{если } x > 0 \\ -\sqrt{y}, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$



Избавлением от иррациональности в знаменателе алгебраического отношения называется преобразование, приводящее знаменатель этого отношения к рациональному виду. Это можно выполнить различными способами.

а) Умножением числителя и знаменателя отношения вида (A – произвольное выражение):

$$1) \frac{A}{a \cdot \sqrt[n]{b}}, \quad a, b \in \mathbb{R}_+^*, \text{ на } \sqrt[n]{b^{n-1}};$$

$$2) \frac{A}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}, \quad a, b \in \mathbb{R}_+^*, \text{ на выражение, сопряженное знаменателю} \\ (\sqrt{a} + \sqrt{b} \text{ и } \sqrt{a} - \sqrt{b} - \text{сопряженные выражения}).$$

Пример

$$\frac{2}{\sqrt{7} - \sqrt{2}} = \frac{2(\sqrt{7} + \sqrt{2})}{(\sqrt{7} - \sqrt{2})(\sqrt{7} + \sqrt{2})} = \frac{2(\sqrt{7} + \sqrt{2})}{(\sqrt{7})^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{2(\sqrt{7} + \sqrt{2})}{5}.$$

б) Применением формул:

$$a - b = (\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b})(\sqrt[n]{a^{n-1}} + \sqrt[n]{a^{n-2}b} + \dots + \sqrt[n]{ab^{n-2}} + \sqrt[n]{b^{n-1}}), \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 2, a, b \geq 0;$$

$$a + b = (\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b})(\sqrt[n]{a^{n-1}} - \sqrt[n]{a^{n-2}b} + \dots - \sqrt[n]{ab^{n-2}} + \sqrt[n]{b^{n-1}}), \quad n \in \mathbb{N}, n - \text{нечетное число}.$$

Пример

$$\frac{2}{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}} = \frac{2(\sqrt[3]{3^2} + \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2^2})}{(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{3^2} + \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2^2})} = \frac{2(\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4})}{(\sqrt[3]{3})^3 - (\sqrt[3]{2})^3} = 2(\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}).$$

Пример

в) Последовательным исключением радикалов алгебраической суммы в знаменателе:

$$\frac{1}{\sqrt{3} + 5 - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} + 5 + \sqrt{2}}{(\sqrt{3} + 5 - \sqrt{2})(\sqrt{3} + 5 + \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{3} + 5 + \sqrt{2}}{(\sqrt{3} + 5)^2 - (\sqrt{2})^2} = \\ = \frac{(\sqrt{3} + 5 + \sqrt{2})(26 - 10\sqrt{3})}{(26 + 10\sqrt{3})(26 - 10\sqrt{3})} = \frac{1}{188}(13\sqrt{2} - 12\sqrt{3} - 5\sqrt{6} + 50).$$

Упражнения и задачи



Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт

A

1. Вычислите:

а) $\sqrt{0,0025}$;

б) $\sqrt{256 \cdot 9 \cdot 36}$;

в) $\sqrt{\frac{25 \cdot 324}{529 \cdot 49}}$;

г) $\sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2}$;

д) $\sqrt[3]{(\sqrt{3} - 2)^3}$;

е) $\sqrt{(\sqrt{3} - 3)^2}$.

В

2.  **Работайте в парах!** Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt[3]{16}$; б) $\sqrt[3]{250}$; в) $\sqrt{32a^4b^3}$, $a > 0$; г) $\sqrt{25a^2b^3}$, $a < 0$;
 д) $\sqrt{(x-3)^2 + 12x}$; е) $\sqrt[3]{x^3y^6}$; ж) $\sqrt{169x^3y^2}$, $y < 0$; з) $\sqrt{8a^5b^6}$, $b < 0$.

3. Внесите множитель под знак корня:

а) $2\sqrt{3}$; б) $-3\sqrt{3}$; в) $-b\sqrt{3}$, $b < 0$; г) $x \cdot \sqrt{\frac{-2}{x}}$; д) $-c\sqrt{7a}$; е) $x \cdot \sqrt[3]{2y}$;
 ж) $a \cdot \sqrt{2a}$; з) $a\sqrt{3}$, $a > 0$; и) $y\sqrt{3}$; к) $x \cdot \sqrt{\frac{2}{x}}$; л) $x \cdot \sqrt[3]{2xy}$; м) $x \cdot \sqrt{-x}$.

4.  **Работайте в группах!** Упростите выражение:

а) $(2\sqrt{3}+5)(5-2\sqrt{3})+(4-\sqrt{5})^2+8\sqrt{5}$; б) $3\sqrt{48}-\sqrt{75}+\frac{1}{7}\sqrt{147}$; в) $\frac{\sqrt{12}-\sqrt{6}}{\sqrt{30}-\sqrt{15}}$;
 г) $(1+\sqrt{5})^3 \cdot (2+\sqrt{5})$; д) $\frac{y-1}{1+\sqrt{y}}$; е) $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$.

С

5. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе:

а) $\frac{1}{2\sqrt{5}-\sqrt{7}}$; б) $\frac{1}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}}$; в) $\frac{5}{\sqrt{13}-\sqrt{18}}$; г) $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{7}}$; д) $\frac{6}{\sqrt[3]{4}}$.

6. Сравните: а) $3\sqrt[3]{5}$ и $5\sqrt[3]{3}$; б) $3\sqrt[3]{4}$ и $4\sqrt[3]{2}$.

Реальный профиль

А₁

1. ( 2018) Заполните рамки натуральным числом, чтобы полученное высказывание было истинным:
 „ $\sqrt[3]{64} = 2 \square$.”
2. ( 2019) Заполните рамки целыми числами, чтобы полученное высказывание было истинным:
 „ $\square < \sqrt[3]{7} < \square$.”

3. Вычислите:

а) $\sqrt{(1-\sqrt{3})^2 - \sqrt[3]{27}}$; б) $\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}$; в) $2^{-2} + \sqrt[3]{\frac{3}{64}} - 2$.

В₁

4. ( 2023) Вычислите значение выражения $\sqrt{9^{1,5}} - 2$.

5. Вычислите:

а) $\sqrt[3]{8+\sqrt{37}} \cdot \sqrt[3]{8-\sqrt{37}}$; б) $\sqrt{5+2\sqrt{6}} + \sqrt{11-6\sqrt{2}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}$; в) $\sqrt{12+2\sqrt{6}-2\sqrt{5}-2\sqrt{30}}$.

6.  **Работайте в парах!** Определите, верно ли равенство:

а) $\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}(2-\sqrt{3})=1$; б) $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}=3$; в) $3+\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}$.

7. Покрасили пол помещения размера $8,45 \text{ м} \times 4 \text{ м}$. Сколько граней куба с ребром $2,6 \text{ м}$ можно покрыть тем же количеством краски при одинаковом расходе краски на 1 м^2 ?

С₁

8. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{(7-a)(4+a)}$, если $\sqrt{7-a}+\sqrt{4+a}=5$; б) $\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}$.

9. Покажите, что $\sqrt{6m+2\sqrt{9m^2-n^2}}-\sqrt{6m-2\sqrt{9m^2-n^2}}=2\sqrt{3m-n}$ при $n \leq 3m$, $m, n \in \mathbb{R}_+$.

10. Покажите, что при $a \geq 0$, $b \geq 0$, $\sqrt{a}+\sqrt{b} \leq \sqrt{(a+1)(b+1)}$.

§2 Степень с действительным показателем

○ Вспомним



Вам уже известно понятие *степени с целым показателем*.

Для $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{R}^*$, было определено: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$; $a^0 = 1$; $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, а $0^n = 0$.

○ Запомните!

1. Выражение 0^0 не определено.
2. $a^m > 0$ для $a > 0$, $m \in \mathbb{Z}$.

**Степень с рациональным показателем**

При изучении степени и ее свойств возникает вопрос о необходимости рассмотрения и степени с рациональным показателем. Положительный ответ на этот вопрос дает само развитие математики: множество $\mathbb{N}$ было расширено до $\mathbb{Z}$, потом до $\mathbb{Q}$, затем до $\mathbb{R}$ и на этих множествах были определены арифметические операции.

Многие задачи в различных областях также приводят к степени с рациональным показателем. Например, было установлено, что количество y бактерий, которые размножаются в некоторой среде, выражается в зависимости от времени t формулой $y = a^t$. Если $t = \frac{3}{2}$ часа, то количество бактерий в этой среде через $\frac{3}{2}$ часа будет $y = a^{\frac{3}{2}}$, то есть получили степень с рациональным показателем.

При определении степени с рациональным и иррациональным показателями естественно потребовать, чтобы оставались в силе свойства, которыми обладают степени с целым показателем.

Соблюдая это условие, выясним суть выражения $a^{\frac{m}{n}}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Для $a > 0$ получаем $(a^{\frac{m}{n}})^n = a^{\frac{m}{n} \cdot n} = a^m$. Так как $(\sqrt[n]{a^m})^n = a^m$, то логично считать, что $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

**определение**

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ для любых $a \in \mathbb{R}_+^*$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$.

Пример

$$(27)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^2} = \sqrt[3]{(3^3)^2} = \sqrt[3]{(3^2)^3} = \sqrt[3]{9^3} = 9.$$

○ Запомните!

1. $0^{\frac{m}{n}} = 0$ для $m, n \in \mathbb{N}^*$.
2. Значение степени $a^{\frac{m}{n}}$ не зависит от способа записи показателя $\frac{m}{n}$.

В самом деле, если $x = \frac{m}{n} = \frac{p}{q}$, то, используя свойства корней, получаем:

$$a^x = a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[q]{a^{\frac{pn}{q}}} = \sqrt[n]{a^{pq}} = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}.$$

3. Степень положительного числа с рациональным показателем положительна, так как значение корня любой степени из положительного числа положительно.
4. Справедливое для степени с целым показателем свойство $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ выполняется и для степени с рациональным показателем, $a \in \mathbb{R}_+^*$. Действительно:

$$a^{-\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^{-m}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a^m}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}.$$

**Задание**

Докажите, что если $\frac{m}{n} = k \in \mathbb{Z}$, то $a^{\frac{m}{n}} = a^k$.

Следующая теорема показывает, что степени с рациональным показателем обладают теми же свойствами, что и степени с целым показателем.

Теорема 2

(свойства степеней с рациональным показателем)

Для $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, $x, y \in \mathbb{Q}$, верно:

- 1° $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$; 2° $(a^x)^y = a^{xy}$;
 3° $(ab)^x = a^x \cdot b^x$; 4° $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$; 5° $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$;
 6° а) $a^x > a^y$, если $a > 1$, $x > y$; б) $a^x < a^y$, если $0 < a < 1$, $x > y$;
 7° а) $a^x > b^x$, если $a > b$, $x > 0$; б) $a^x < b^x$, если $a > b$, $x < 0$;
 8° $(a^x = a^y, a \neq 1) \Leftrightarrow (x = y)$.

Доказательство:

Докажем свойства 1°, 2°, 4° (остальные свойства можно доказать аналогично).

Пусть $x = \frac{m}{k}$, $y = \frac{p}{r}$, $m, p \in \mathbb{Z}$, $k, r \in \mathbb{N}^*$, $k > 1$, $r > 1$. Используя свойства корней и степеней с целым показателем, получаем:

$$\begin{aligned} 1^\circ a^x \cdot a^y &= a^{\frac{m}{k}} \cdot a^{\frac{p}{r}} = \sqrt[k]{a^m} \cdot \sqrt[r]{a^p} = \sqrt[kr]{a^{mr}} \cdot \sqrt[kr]{a^{kp}} = \sqrt[kr]{a^{mr+kp}} = a^{\frac{mr+kp}{kr}} = a^{\frac{m}{k} + \frac{p}{r}} = a^{x+y}; \\ 2^\circ (a^x)^y &= \left(a^{\frac{m}{k}}\right)^{\frac{p}{r}} = \sqrt[r]{\left(\sqrt[k]{a^m}\right)^p} = \sqrt[r]{\sqrt[k]{a^{mp}}} = \sqrt[kr]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{rk}} = a^{xy}; \\ 4^\circ \left(\frac{a}{b}\right)^x &= \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{k}} = \sqrt[k]{\left(\frac{a}{b}\right)^m} = \sqrt[k]{\frac{a^m}{b^m}} = \frac{\sqrt[k]{a^m}}{\sqrt[k]{b^m}} = \frac{a^{\frac{m}{k}}}{b^{\frac{m}{k}}} = \frac{a^x}{b^x}. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$



Задание

Докажите свойства 3°, 5°–8°.

Пример

$$\left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right) = \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3 - \left(b^{\frac{1}{3}}\right)^3 = a - b.$$



Степень положительного числа с иррациональным показателем определяем, используя десятичные приближения иррационального числа с недостатком и избытком (см. модуль 1). Известно, что для любого иррационального числа x существуют такие рациональные числа x_n, x'_n , что $x_n < x < x'_n$, $x'_n - x_n = 10^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$.



Определение

Степенью числа a , $a > 1$ ($0 < a < 1$), обозначенной a^x , с **иррациональным показателем** x , называется действительное число t , которое для любого натурального n удовлетворяет двойным неравенствам $a^{x_n} < t < a^{x'_n}$ ($a^{x_n} < t < a^{x'_n}$), где x_n, x'_n – десятичные приближения числа x с недостатком и избытком соответственно (с n цифрами после запятой).

По определению считаем, что $1^x = 1$ для любого иррационального числа x .

Можно доказать, что, при указанных в определении условиях, значение степени a^x однозначно определено.



Задание с решением

Что понимаем под числом: а) $5^{\sqrt{2}}$; б) $(0,1)^{\sqrt{2}}$?

Решение:

а) Известны десятичные приближения числа $\sqrt{2}$:

$$1 < \sqrt{2} < 2; \quad 1,4 < \sqrt{2} < 1,5; \quad 1,41 < \sqrt{2} < 1,42; \quad 1,414 < \sqrt{2} < 1,415; \dots$$

Следовательно, число $t = 5^{\sqrt{2}}$ является единственным числом, которое удовлетворяет двойным неравенствам:

$$5^1 < t < 5^2; \quad 5^{1,4} < t < 5^{1,5}; \quad 5^{1,41} < t < 5^{1,42}; \quad 5^{1,414} < t < 5^{1,415}; \dots$$

б) $s = (0,1)^{\sqrt{2}}$ является единственным числом, удовлетворяющим двойным неравенствам: $(0,1)^2 < s < (0,1)^1$; $(0,1)^{1,5} < s < (0,1)^{1,4}$; $(0,1)^{1,42} < s < (0,1)^{1,41}$; $(0,1)^{1,415} < s < (0,1)^{1,414}$; ...

4 Степень положительного числа с действительным показателем обладает теми же свойствами, что и степень с рациональным показателем. Докажем, например, свойство 1° теоремы 2.

Доказательство:

Из двойных неравенств $x_n \leq x < x'_n$ и $y_n \leq y < y'_n$, где x_n, x'_n, y_n, y'_n — десятичные приближения действительных чисел x, y , получаем, что $x_n + y_n \leq x + y < x'_n + y'_n$ и при $a > 1$ имеем $a^{x_n} \leq a^x < a^{x'_n}$, $a^{y_n} \leq a^y < a^{y'_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Умножив почленно эти неравенства, получим $a^{x_n} a^{y_n} \leq a^x a^y < a^{x'_n} a^{y'_n}$, или $a^{x_n + y_n} \leq a^x a^y < a^{x'_n + y'_n}$. Поскольку a^{x+y} также должно удовлетворять последнему неравенству для $n \in \mathbb{N}$, то ввиду единственности числа, удовлетворяющего этим неравенствам, следует, что $a^x a^y = a^{x+y}$. ►

О Запомните!

1. При $a \leq 0$ степень с иррациональным показателем не определяется.
2. Для $a > 0$ и $x \in \mathbb{R}$ имеем $a^x > 0$, так как a^x содержится между двумя степенями с рациональными показателями числа a , которые, как известно, положительны. Следовательно, значение a^x — положительное число.

Задания с решением

1. Вычислим $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}\right]^{-\sqrt{27}}$.

Решение:

$$\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}\right]^{-\sqrt{27}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\sqrt{81}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-9} = (2^{-1})^{-9} = 2^9 = 512.$$

2. Сравним:

- а) действительные числа x и y , если известно, что $(\sqrt{7} - \sqrt{5})^x \geq (\sqrt{7} - \sqrt{5})^y$;
- б) число $(\sqrt{7} - \sqrt{5})^{1,2}$ с 1.

Решение:

а) Поскольку даны две степени с одинаковым основанием, сравним с единицей это основание. Из двойных неравенств $2 < \sqrt{7} < 3$, $2 < \sqrt{5} < 3$, $-3 < -\sqrt{5} < -2$, $\sqrt{7} > \sqrt{5}$ следует, что $0 < \sqrt{7} - \sqrt{5} < 1$. По свойству 6° теоремы 2 получаем, что $x \leq y$.

- б) Имеем $(\sqrt{7} - \sqrt{5})^{1,2} < (1)^0 = 1$.

Упражнения и задачи

Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт

A

1. Вычислите:

$$\begin{aligned} \text{а) } 3^{-1} \cdot 5 + \left(\frac{3}{2}\right)^{-1}; & \quad \text{б) } \frac{9^{0,5}}{9,28 \cdot 10^{-5} - 2,8 \cdot 10^{-6}}; & \quad \text{в) } \frac{0,04^{-2} \cdot 25 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-1}}{2 \cdot 5^4}; \\ \text{г) } \left(\frac{1}{25}\right)^{-5} \cdot \left(\frac{1}{125}\right)^4 - \left(\frac{1}{5}\right)^{-10} \cdot \left(\frac{1}{625}\right)^3; & \quad \text{д) } (2,73)^0 \cdot (0,4)^{-2} \cdot (2,5)^2; & \quad \text{е) } \frac{3 \cdot 7^{-1} \cdot \frac{7}{4}}{(0,5)^2 \cdot 3^{-1}}. \end{aligned}$$

2. (Ерк 2011) Заполните рамку, чтобы получилось истинное высказывание: „Если $2^x = a$, $a \in \mathbb{R}_+$, то $2^{x+1} = \square$ ”.
3. (Ерк 2021) Впишите в рамку целое число, чтобы получилось истинное высказывание: „ $\left(\frac{2}{3}\right)^\square = \frac{81}{16}$ ”.

B

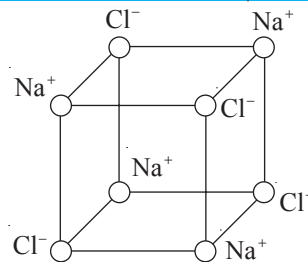
4.  **Работайте в парах!** Упростите выражение:

$$\begin{aligned} \text{а) } \frac{a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}{a + b}; & \quad \text{б) } \frac{x + 2x^{\frac{1}{2}}}{2x}; & \quad \text{в) } \frac{a - 4a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{3}{4}} + 2a^{\frac{1}{2}}}; & \quad \text{г) } \frac{a}{a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} + b} + \frac{b}{a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} - a} - \frac{a + b}{a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

5.  **Исследуйте!** Сравните с 1: а) $\left(\frac{1}{3}\right)^{1,2}$; б) $\left(\frac{5}{3}\right)^{10}$; в) $(\pi - 3)^{-1,5}$.
6. Цена футболки после двух последовательных повышений на один и тот же процент изменилась со 100 д. е. до 125,44 д. е. На сколько процентов повышалась цена каждый раз?

С

7. Кристалл поваренной соли (NaCl) состоит из 4 ионов натрия (Na^+) и 4 ионов хлора (Cl^-), расположенных в вершинах решетки в виде куба. Диагональ грани куба равна $4 \cdot 10^{-8}$ см. Сколько таких кубиков содержится (приблизительно) в одной крупинке соли объемом $0,1 \text{ мм}^3$?
8. Найдите x , если одна сторона прямоугольника равна $x^{\frac{3}{2}}$ см, другая – x^2 см, а площадь прямоугольника равна 15 см^2 .



Реальный профиль

А₁

1. Вычислите:
- а) $\frac{2 \cdot 5^{20} - 9 \cdot 5^{19}}{5^{18}}$; б) $4^{-1} \cdot (0,34)^0 + \left(\frac{1}{4}\right)^{0,5} \cdot (6,25)^{0,5}$;
- в) $\left[\left(\frac{5}{3}\right)^4\right]^{-\frac{3}{4}} \cdot (0,3)^{-1} \cdot (7)^0 \cdot (0,1)^{-4}$; г) $\frac{(0,2)^{-1} \cdot 5^4 \cdot 25^4 \cdot (0,2)^{-4}}{4 \cdot 5^2}$; д) $(3^{-1})^6 \cdot 9^{\sqrt{3}} (9^{-1})^{\sqrt{27}}$.
2. ( 2012) Впишите соответствующий показатель степени: $2^n + 2^n = 2^{\quad}$.
3. ( 2019) Вычислите значение выражения: $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} + 8^{\frac{2}{3}}$.
4. ( 2022) Вычислите значение выражения: $32^{\frac{3}{5}} - 8$.

В₁

5.  **Работайте в группах!** Упростите выражение (на соответствующей ОДЗ):

а) $\frac{a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}} - \frac{a^{\frac{2}{3}} + 2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}}{a + b}$; б) $\left(1 - \frac{x^{-3} - 1}{x^{-1} - 1} \cdot \frac{1 + x + x^2}{x}\right) \cdot \left(\frac{1}{1 - x^{-\frac{1}{2}}} - \frac{1}{1 - x^{-1}}\right)$;

в) $\left(\frac{x^{\frac{1}{2}} + 3y^{\frac{1}{2}}}{x - 2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} + y} + \frac{x^{\frac{1}{2}} - 3y^{\frac{1}{2}}}{x - y}\right) \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}}{2}$; г) $\frac{\left(x^{\frac{2}{3}} + 2\sqrt[3]{xy} + 4y^{\frac{2}{3}}\right)}{\left(x^{\frac{4}{3}} - 8y \cdot \sqrt[3]{x}\right) : \sqrt[3]{xy}} \cdot \left(2 - \sqrt[3]{\frac{x}{y}}\right)$;

д) $((\sqrt{7})^{\sqrt{5}})^{-2\sqrt{5}}$; е) $\frac{75^{\sqrt{48}}}{25^{\sqrt{108}}} \cdot \frac{5^{37\sqrt{3}}}{15^{\sqrt{27}}}$.

6.  **Исследуйте!** Сравните с 1:
- а) $(\sqrt{5} - \sqrt{3})^{\frac{1}{2}}$; б) $(\sqrt{7} - 1)^{\frac{1}{3}}$; в) $(\sqrt{3} - 1)^{\frac{7}{2}}$; г) $\left(\frac{2}{7}\right)^{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$; д) $\left((27)^{-\frac{1}{3}}\right)^{\frac{\sqrt{3}}{8}}$.
7. Проверьте справедливость равенства: $(x + 2(x - 1)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} + (x - 2(x - 1)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = 2$, если $1 \leq x \leq 2$.

С₁

8. Какому из множеств $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{R}_-^*$ должны принадлежать числа a , b , чтобы выполнялось равенство: $(ab)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{1}{3}}$?
9. Найдите ОДЗ и упростите выражение:
- $$\frac{m^5 + m^4 \cdot \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} m^9}{|m^3 - 1| - 1}.$$

§3 Логарифмы



Логарифмы были изобретены шотландским ученым **Джонсом Непером** (1550–1617). Он сделал открытие, что умножение и деление чисел можно заменить соответственно на сложение и вычитание логарифмов этих чисел. И. Кеплер, например, использовал десятичные логарифмы для громоздких астрономических расчетов. В настоящее время сложно найти область науки, где бы не применялись логарифмы.

3.1. Понятие логарифма

В предыдущем параграфе определили степень с положительного действительного числа a с произвольным действительным показателем b так, что $a^b = c$, $c > 0$.

Равенство $a^b = c$ порождает проблему: существуют ли $x \in \mathbb{R}$ такие, что $a^x \in \{9, 10, 27, \frac{3}{4}, \pi, \dots\}$?

Например, для $a = 3$, получим $a^2 = 9$, $a^3 = 27$.

В общем случае, нахождение x такого, чтобы $a^x = y$, $a \in \mathbb{R}_+^*$, $y \in \mathbb{R}_+^*$, послужило одним из мотивов введения понятия *логарифма*.

Сформулируем без доказательства следующее утверждение:

Теорема 3

Для любых положительных действительных чисел a, c , $a \neq 1$, существует единственное действительное число b , удовлетворяющее равенству $a^b = c$.

Замечание

Единственность числа b следует из свойства 8° степеней.

Определение

Логарифмом положительного числа c по основанию a , $a \in \mathbb{R}_+^*$, $a \neq 1$, называется действительное число b , для которого $a^b = c$.

Обозначают: $\log_a c = b$.

Следовательно, $\log_a c = b \Leftrightarrow a^b = c$ (1).

Подставив выражение для b в равенство (1), получим *основное логарифмическое тождество*:

$$a^{\log_a c} = c, \quad a, c \in \mathbb{R}_+^*, a \neq 1.$$

Примеры

а) $\log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$, так как $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$; б) $\log_{\sqrt{3}} 9 = 4$, так как $(\sqrt{3})^4 = 9$.

О Запомните!

1. Условие $a \neq 1$ обязательно, поскольку в противном случае, согласно определению логарифма, $1^b = 1$ для любого $b \in \mathbb{R}$ и, следовательно, число b не определяется однозначно.
2. Условие, чтобы числа a и c были положительными, исходит из понятия *степень числа c действительным показателем* и из того, что такая степень принимает только положительные значения. Поэтому выражения вида $\log_3(-6)$, $\log_{(-3)} 9$ не имеют смысла.
3. В некоторых случаях в вычислениях используются *десятичные логарифмы* (обозначаются $\lg c = \log_{10} c$, $c > 0$) и/или *натуральные логарифмы* (обозначаются $\ln c = \log_e c$, $c > 0$, где $e = 2,7182\dots$ – иррациональное число, которое будет определено позже).
4. К понятию логарифм числа мы вернемся в модуле 7.

3.2. Свойства логарифмов

Теорема 4

(свойства логарифмов)

Для любых $a, c, x, y \in \mathbb{R}_+^*$, $a \neq 1, c \neq 1, \alpha \in \mathbb{R}$, верно:

$$1^\circ \log_a a = 1;$$

$$2^\circ \log_a 1 = 0;$$

$$3^\circ a^{\log_a x} = x \text{ (основное логарифмическое тождество);}$$

$$4^\circ \log_a (xy) = \log_a x + \log_a y;$$

$$5^\circ \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y;$$

$$6^\circ \log_a x^\alpha = \alpha \log_a x;$$

$$7^\circ \log_{a^\alpha} x = \frac{1}{\alpha} \log_a x \quad (\alpha \neq 0);$$

$$8^\circ \log_a x = \frac{\log_c x}{\log_c a};$$

$$9^\circ \log_a c = \frac{1}{\log_c a};$$

$$10^\circ \log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y;$$

$$11^\circ x > y > 0 \Rightarrow \log_a x > \log_a y, \text{ если } a > 1 \\ \text{и } \log_a x < \log_a y, \text{ если } 0 < a < 1.$$

Доказательство:

Свойства 1° и 2° следуют из равенств $a^1 = a$ и $a^0 = 1$ соответственно.

3° Пусть $a^b = x$, $a \neq 1$, тогда $b = \log_a x$. Подставив выражение для b в первое равенство, получим $a^{\log_a x} = x$.

4° Исходя из свойства 3° , получим $a^{\log_a (xy)} = xy = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = a^{\log_a x + \log_a y}$. На основании свойства 8° степени получаем, что $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$.

Свойства 5° и 6° доказывают аналогично свойству 4° .

$$7^\circ (a^\alpha)^{\log_a x} = x = a^{\log_a x} = (a^\alpha)^{\frac{1}{\alpha} \log_a x}, \text{ следовательно, } \log_{a^\alpha} x = \frac{1}{\alpha} \log_a x.$$

$8^\circ a^{\log_a x} = x = c^{\log_c x} = c^{\log_c a \cdot \frac{\log_c x}{\log_c a}} = (c^{\log_c a})^{\frac{\log_c x}{\log_c a}} = a^{\frac{\log_c x}{\log_c a}}$. Приравнявая показатели степеней, получаем соответствующее свойство.

Свойство 9° следует из свойства 8° при $x = c$, с учетом, что $\log_c c = 1$. ►

Замечание

Свойства 4° – 7° могут быть обобщены в виде свойств 12° – 15° .

Теорема 5

(свойства логарифмов, обобщение)

Для любых $x \in \mathbb{R}_+^*$, $u, v \in \mathbb{R}_+^*$, $\alpha = 2k$, $k \in \mathbb{Z}^*$, выполнены равенства:

$$12^\circ \log_a (uv) = \log_a |u| + \log_a |v|;$$

$$14^\circ \log_a u^\alpha = \alpha \log_a |u|;$$

$$13^\circ \log_a \frac{u}{v} = \log_a |u| - \log_a |v|;$$

$$15^\circ \log_{u^\alpha} x = \frac{1}{\alpha} \log_{|u|} x.$$

Свойства 12° – 14° следуют из свойств 4° – 7° при замене uv на $|uv|$, $\frac{u}{v}$ на $\frac{|u|}{|v|}$, u^α на $|u|^\alpha$.

Задание с решением

Упростим выражение: $A = \log_5^2 10 + \log_5 0,5 \cdot \log_5 50 + 3$.

Решение:

Применив свойства логарифмов, перейдем во всех слагаемых выражения A к логарифмам по основанию 5:

$$\begin{aligned} A &= (\log_5 (2 \cdot 5))^2 + \log_5 (2^{-1}) \cdot \log_5 (25 \cdot 2) + 3 = \\ &= (\log_5 2 + \log_5 5)^2 - \log_5 2 \cdot (\log_5 5^2 + \log_5 2) + 3 = \\ &= \log_5^2 2 + 2 \log_5 2 + 1 - 2 \log_5 2 - (\log_5 2)^2 + 3 = 4. \end{aligned}$$

○ **Запомните!**

Операция, при выполнении которой выражению E , $E > 0$, ставится в соответствие $\log_a E$, $a > 0$, $a \neq 1$, называется **логарифмированием**. Действие, обратное логарифмированию, то есть отыскание выражения по его логарифму, называется **потенцированием**.

3 **Замечание**

Сравнение логарифмов с одинаковыми основаниями выполняется следующим образом: если $c > 1$, то $\log_c a < \log_c b \Leftrightarrow a < b$, а если $0 < c < 1$, то $\log_c a < \log_c b \Leftrightarrow a > b$, $a, b > 0$.

 Задание с решением

Сравним:

а) $\log_2 3$ с 1,5; б) $\lg \frac{1}{3}$ с $\lg \frac{1}{5}$.

Решение:

а) Полагаем, что $\log_2 3 < 1,5$. Потенцируя, на основании свойств степени получаем $2^{\log_2 3} < 2^{1,5} \Leftrightarrow 3 < 2^{1,5}$. Последнее неравенство неверно, так как $2^{1,5} = 2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3} = 2\sqrt{2} < 3$. Следовательно, верно, что $\log_2 3 > 1,5$.

б) Так как $\frac{1}{3} > \frac{1}{5}$, согласно свойству 11°, получим $\lg \frac{1}{3} > \lg \frac{1}{5}$.

○ **Запомните!**

В силу свойств 3° и 6° любое положительное число можно представить как степень любого другого положительного, отличного от 1, числа или как логарифм положительного числа с произвольным положительным, отличным от 1, основанием. Действительно, $a = c^{\log_c a} = \log_c c^a$, $a, c \in \mathbb{R}_+^*$, $c \neq 1$. Эти представления применяются при решении уравнений, неравенств и т. д.

Упражнения и задачи

Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт

A

1. Вычислите:

а) $25^{\log_5 3}$;

б) $\frac{\log_2 25}{\log_2 5}$;

в) $\log_3 5 \cdot \log_4 9 \cdot \log_5 2$;

г) $\sqrt{\log_{0,5}^2 4}$;

д) $5^{\log_{\sqrt{5}} 4 + 2 \log_5 3}$;

е) ( 2022) $\log_{\sqrt{2}} 4 - 4$.

2. ( 2023) Вычислите: $\log_4 32 - 4,5$.

3. ( 2012) Заполните рамку, чтобы получилось истинное высказывание: „ $3 \cdot 7^{\log_7 5} = \square$ ”.

4. ( 2014) Впишите целое число, чтобы получилось истинное высказывание: „ $\log_{\sqrt{2}} \square = 2$ ”.

B

5.  **Работайте в парах!** Найдите число x , если $\lg x = 2 \lg 5 - 3 \lg 2 - 0,5 \lg 625 + 0,25 \lg 256$.

6. Упростите выражение: $\log_{\sqrt{6}} 3 \cdot \log_3 36 + \log_{\sqrt{3}} 8 \cdot \log_4 81$.

7.  **Исследуйте!** Докажите, что: а) $36^{\log_6 5} + 10^{1 - \lg 2} - 3^{\log_9 36} = 24$; б) $81^{\frac{1}{\log_5 9}} + 3^{\log_9 16} + 3^{\frac{2}{\log_7 9}} = 36$.

8. ( 2021) Вычислите значение выражения: $\log_{\sqrt{3}} 6 - \log_3 4$.

9. Выразите число 56 через a и b , если $\lg 2 = a$, $\log_2 7 = b$.

C

10. Запишите в порядке возрастания числа $\log_2 3$, 1, $\log_2 5$.

11. Докажите потенцированием, что $\log_3 2 > 0,5$.

A₁

1. (ЕАК 1 2013) Впишите один из знаков $>$, $<$ или $=$, чтобы получилось истинное высказывание:
 $\log_{\sqrt{3}} 3 \quad \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9}$.
2. (ЕАК 1 2015) Впишите один из знаков $>$, $<$ или $=$, чтобы получилось истинное высказывание:
 $\log_2 \frac{1}{2} \quad 0$.
3. (ЕАК 1 2017) Впишите один из знаков $>$, $<$ или $=$, чтобы получилось истинное высказывание:
 $\log_3 8 \quad \log_2 8$.
4. Упростите выражение (при допустимых значениях переменных):
 а) $\log_2 ab - \log_2 |b|$;
 б) $\log_a b^2 + \log_{a^2} b^4$;
 в) $(\log_a b + \log_b a + 2)(\log_a b - \log_{ab} b) \log_b a - 1$;
 г) $\frac{\log_2 24}{\log_{96} 2} - \frac{\log_2 192}{\log_{12} 2}$;
 д) $(6(\log_b a \log_{a^2} b + 1) + \log_a b^{-6} + \log_a^2 b)^{\frac{1}{2}} - \log_a b$;
 е) $\left(a^{1 + \frac{1}{2\log_4 a}} + 8^{\frac{1}{3\log_{a^2} 2}} + 1 \right)^{\frac{1}{2}}$.

B₁

5. Потенцированием найдите число x , если $\log_5 x = 2\log_5 \sqrt[4]{5} + \frac{1}{2}\log_{\sqrt{5}} 25 - \log_5^2 \sqrt{5} - 2$.
6. (ЕАК 1 2022) Найдите значение выражения: $2^{\log_4 36} - \log_5 \frac{1}{25}$.
7. (ЕАК 1 2021) Вычислите значение выражения: $7^{\log_{49} 3} \cdot 3^{\frac{1}{2}}$.
8. Найдите:
 а) $\log_{30} 8$, даё $\log_{30} 3 = a$, $\log_{30} 5 = b$; б) $\log_{54} 168$, даё $\log_7 12 = a$, $\log_{12} 24 = b$.
9.  **Работайте в парах!** Применив свойства степеней, докажите, что:
 а) $0,6 < \log_3 2 < 0,7$; б) $(0,7)^{\frac{1}{3}} > 2^{-\frac{1}{3}}$.

C₁

10.  **Работайте в группах!** Докажите (при допустимых значениях переменных), что:
 а) $\frac{\log_a x}{\log_{ab} x} = 1 + \log_a b$; б) $\lg \frac{|a+b|}{3} = \frac{\lg |a| + \lg |b|}{2}$, даё $a^2 + b^2 = 7ab$; в) $\log_{ab} c = \frac{\log_a c \cdot \log_b c}{\log_a c + \log_b c}$;
 г) $a^{\frac{\lg a}{\lg a}} = \lg a$; д) $\sqrt{\log_n p + \log_p n + 2} \cdot (\log_n p - \log_{np} p) \sqrt{\log_n p} = \log_n^2 p$; е*) $a^{\sqrt{\log_a b}} - b^{\sqrt{\log_b a}} = 0$.
- 11*. Упростите выражение: $\log_{a+b} m + \log_{a-b} m - 2\log_{a+b} m \cdot \log_{a-b} m$, если $m^2 = a^2 - b^2$, $m, (a \pm b) \in \mathbb{R}_+^*$, $a \pm b \neq 1$.

Упражнения и задачи на повторение



Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт

A

1. Вычислите:
 а) $\sqrt[3]{64}$; б) $\log_3 4 + \log_3 \frac{9}{4}$; в) $5\sqrt[3]{0,027}$;
 г) $((0,6)^{-4})^{-0,75} \cdot (0,09)^{-2^{-1}} \cdot 0,1^{-4}$; д) (ЕАК 1 предтестирование, 2024) $\log_5 \sqrt{125} - 2,5$.
2.  **Исследуйте!** Найдите истинностное значение высказывания:
 а) $7\sqrt{2} > 2\sqrt{7}$; б) $\log_{\sqrt{3}} 2 < \log_{\sqrt{3}} 0,5$; в) $\sqrt{3} + 1 = \sqrt{28 - 16\sqrt{3}}$; г) $\log_3 \frac{5}{9} - \log_3 5 = 2$.
3. Вычислите: а) $(\sqrt{27} - 2\sqrt{3} + \sqrt{5}) \cdot (\sqrt{125} + \sqrt{3} - 6\sqrt{5})$; б) $2^{\frac{1}{4}} \cdot 0,5^{-3} : 4$.
4. Зная, что $4^a + 4^{-a} = 23$, найдите значение выражения $2^a + 2^{-a}$.

В

5.  **Работайте в парах!** Упростите выражение:

а) $\left(\frac{1}{2x-1} + 2x + 1\right) \cdot \left(2x + \frac{4x^2}{1-2x}\right)$; б) $\log_3 5 \cdot \log_4 9 \cdot \log_5 2$.

6. Сравните числа:

а) $\sqrt{24}$ и $\sqrt[3]{27}$; б) $(\sqrt{5})^{16}$ и $\left(\frac{1}{5}\right)^{-10}$.

7. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе:

а) $\frac{3}{\sqrt{6} + \sqrt{3}}$; б) $\frac{4}{\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{5}}$; в*) $\frac{1}{3 - \sqrt{2} - \sqrt{5}}$.

С

8. Бассейн санатория в виде параллелепипеда наполняют лечебной водой из цистерны до уровня 1,77 м. Основанием бассейна является прямоугольник со сторонами 2,0 м и 2,3 м. В наличии цистерны в виде куба с ребром: 1,9 м, 1,95 м, 2,0 м, 2,05 м, ... Какую цистерну следует выбрать, чтобы водой из нее можно было наполнить бассейн, не превышая предусмотренного уровня?



9. Некто утверждает, что $3 < 2$, так как из $(0,5)^3 < (0,5)^2$ последовательно следует: $\lg(0,5)^3 < \lg(0,5)^2$, $3\lg 0,5 < 2\lg 0,5$, $3 < 2$.

Где ошибка?

Реальный профиль

А₁

1. ( 2014) Впишите один из знаков $>$, $<$ или $=$, чтобы получилось истинное высказывание:

„ $\log_2 \frac{1}{8}$  $\sqrt[3]{-8}$ ”.

2. ( 2016) Впишите один из знаков $>$, $<$ или $=$, чтобы получилось истинное высказывание:

„ $\sqrt[3]{-\frac{8}{27}}$  $-\frac{3}{4}$ ”.

3. Докажите, что: а) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = 2$, если $1 \leq x \leq 2$;

б) $\log_c \frac{a+b}{3} = \frac{1}{2}(\log_c a + \log_c b)$, если $a^2 + b^2 = 7ab$, $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$, $c \neq 1$.

В₁

4.  **Исследуйте!** Найдите истинностное значение высказывания:

а) $3 + \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7} = \sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}$; б) $\sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{9\sqrt{18} - 9\sqrt{12} - 3}$.

н/п

5.  **Работайте в группах!** Упростите выражение (при допустимых значениях переменных):

а) $(\sqrt[3]{2\sqrt{2}} - 16^{-0,25})(16^{-0,25} + (2\sqrt{2})^{\frac{1}{3}})$; б) $3^{\frac{1}{\log_5 \sqrt{3}}} - 9^{\log_3 5} + 3^{\log_9 36}$;

в) $\frac{1}{\sqrt{a+\sqrt{a}} \cdot \sqrt[3]{b}} \cdot \sqrt{\sqrt[3]{a^3 b} + \frac{b\sqrt{a-a^2}}{\sqrt[3]{b-\sqrt{a}}}}$; г) $\log_{\sqrt{6}}(a^3 - 2) + \log_6(a - 2) + \log_{\frac{1}{6}}(a - 2)$.

6. Сравните:

а) $\log_{0,3}\left(\frac{11}{6}\log_2 6 - \frac{11}{6}\right)$ с 0;

б) $((\sqrt{2})^{\sqrt{2}})^{-\sqrt{2}}$ с $((\sqrt{3})^{\sqrt{3}})^{-\sqrt{3}}$;

в) $\left((4^{\frac{5}{2}})^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{1}{4}}$ с $\left((8^2)^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{6}}$;

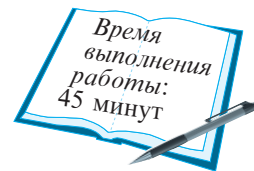
г) $\log_{\sqrt{2}} 7$ с $\log_{0,2} 3$;

д) ( 2023) $0,25^{0,5} + 3$ с $8 \cdot 2^{0,5}$.

7. При каких значениях a верно равенство $\log_b a^2 = 2 \log_b (-a)$, ($b > 0$, $b \neq 1$)?
8. Вычислите:
 а) $\log_{\sqrt{3}} 8$, если $\log_{12} 3 = a$; б) $\log_{30} 8$, если $\log_{30} 3 = a$, $\log_{30} 5 = b$.
9. Найдите натуральное число n , при котором верно равенство $3^2 \cdot 3^5 \cdot 3^8 \cdot \dots \cdot 3^{3n-1} = 27^5$.

Итоговый тест

Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт



В заданиях 1, 5 укажите верный вариант.

1. Значения переменных a , b , для которых $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$, принадлежат множеству
 А $\mathbb{R}_+$. В $\mathbb{R}$. С $\mathbb{R}_+^*$. D $\mathbb{Z}$.
2. Сравните числа $3\sqrt{7}$ и $7\sqrt{3}$.
3. Найдите истинностное значение высказывания:
 а) $8^{\frac{2}{3}} = 4^2$; б) $3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{3}{4}}$.
4. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе $\frac{14\sqrt{2}}{\sqrt{7} + \sqrt{5}}$.
5. Значение выражения $\left((\sqrt{8})^{-\frac{13}{3}} \right)^{\frac{3}{26}}$:
 А больше 1. В меньше 1. С равно 1.
6. Вычислите: $a^{\frac{2}{\log_b a}} - 2a^{\log_a b + 1} + b^{\frac{2}{\log_a b}}$, $a > 1$, $b > 1$.



Реальный профиль

В заданиях 1, 4 укажите верный вариант.

1. Значения переменных a , b , для которых $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, $n \in \mathbb{N}^*$, принадлежат множеству
 А $\mathbb{R}_+$. В $\mathbb{R}$. С $\mathbb{R}_+^*$. D $\mathbb{Z}$.
2. Сравните числа $(\sqrt[3]{4})^{\frac{1}{3}}$ и $(\sqrt[3]{2})^{\frac{1}{4}}$.
3. Упростите выражение $\frac{\sqrt{x^3} + \sqrt{xy^2} - \sqrt{x^2y} - \sqrt{y^3}}{y^{\frac{5}{4}} - (xy^4)^{\frac{1}{4}} + (x^4y)^{\frac{1}{4}} - x^{\frac{5}{4}}}$.
4. Значение выражения $\left(\frac{1}{2}\right)^{13} \cdot 4^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{1}{8}\right)^{\sqrt{27}} \cdot 16^3$:
 А больше 1. В меньше 1. С равно 1.
5. Вычислите: $-\log_2 \sqrt{(\log_4 \sqrt{256})^{\frac{1}{5}}}$.
6. Найдите допустимые значения переменной a и упростите выражение:
 $(2^{\log_{2^{1/4}} a} - 3^{\log_{27} (a^2 + 1)^3} - 2a) : (7^{4 \log_{49} a} - a - 1)$.

$a^b = c$, где $a, b, c \in \mathbb{R}$

Нахождение c

Степени
Определения

- $b = n, n \in \mathbb{N}: a^0 = 1 (a \neq 0), a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$;
- $b = -n: a^{-n} = \frac{1}{a^n} (a \neq 0)$;
- $b = \frac{m}{k}: a^{\frac{m}{k}} = \sqrt[k]{a^m}, m \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, a > 0$;
- $b = \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}: a > 1, a^{x_k} \leq a^\alpha \leq a^{y_k}$,
 $0 < a < 1, a^{y_k} \leq a^\alpha \leq a^{x_k}$, где x_k, y_k –
 десятичные приближения числа α ;
 $0^\alpha = 0, \alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

Свойства

Для $x, y \in \mathbb{R}, a, b \in \mathbb{R}_+^*$, верно:

- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;
- $(a^x)^y = a^{xy}$;
- $(ab)^x = a^x \cdot b^x$;
- $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$;
- $a^x : a^y = a^{x-y}$;
- $\begin{cases} x > y \\ a > 1 \end{cases} \Rightarrow a^x > a^y$;
- $\begin{cases} x > y \\ 0 < a < 1 \end{cases} \Rightarrow a^x < a^y$.

Нахождение b

Логарифмы
Определения

$\log_a c = b \Leftrightarrow a^b = c, c, a \in \mathbb{R}_+^*, a \neq 1, b \in \mathbb{R}$.
 $\lg c = \log_{10} c$ – десятичные логарифмы;
 $\ln c = \log_e c$ – натуральные логарифмы,
 где $e \approx 2,71...$

Свойства

Для $a, c \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}, x, y \in \mathbb{R}_+^*$, верно:

- $\log_a a = 1; 2^\circ \log_a 1 = 0; 3^\circ a^{\log_a c} = c$;
- $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$;
- $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$;
- $\log_a x^b = b \cdot \log_a x$;
- $\log_{a^\alpha} x = \frac{1}{\alpha} \log_a x, \alpha \neq 0$;
- $\log_a x = \frac{\log_c x}{\log_c a}$;
- $\log_a c = \frac{1}{\log_c a}$;
- $\log_a x^{2k} = 2k \log_a |x|, k \in \mathbb{Z}, x \neq 0$;
- $\log_a (xy) = \log_a |x| + \log_a |y|, xy > 0$;
- $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a |x| - \log_a |y|, xy > 0$;
- $\begin{cases} x > y > 0 \\ a > 1 \end{cases} \Rightarrow \log_a x > \log_a y$;
- $\begin{cases} x > y > 0 \\ 0 < a < 1 \end{cases} \Rightarrow \log_a x < \log_a y$.

Геометрические фигуры на плоскости.

Треугольники. Окружность и круг.

Повторение и дополнения

модуль 4

Геометрия – это огромный сад, где каждый может выбрать букет по своему вкусу.

Давид Гильберт

Цели

- идентификация и использование аксиом, определений и теорем, свойственных геометрии на плоскости;
- применение элементов геометрии в различных контекстах;
- идентификация и применение треугольников и их свойств в различных ситуациях;
- распознавание и применение окружности, круга и их свойств в реальных и/или смоделированных ситуациях.

§1 Элементы дедуктивной геометрии

В курсе геометрии V-IX классов вы научились различать и определять основные фигуры на плоскости и в пространстве, узнавать основные свойства этих фигур опытным путем, многократными построениями, внимательным наблюдением и их описанием. В результате этих экспериментальных наблюдений были выведены правила и сформулированы определения в виде обобщений замеченных свойств. В этом заключается *интуитивный (индуктивный) метод* изучения геометрии.

В дальнейшем мы будем углублять и систематизировать эти навыки и умения, используя наряду с интуитивным методом и *рациональный (дедуктивный) метод* изучения геометрии.

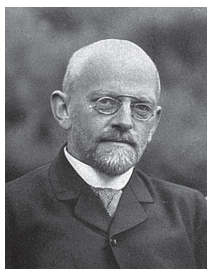
Сущность дедуктивного метода изучения геометрии состоит в том, что свойства геометрических фигур выводятся точными рассуждениями, опирающимися лишь на общие свойства фигуры, отвлекаясь от всего частного изучаемой фигуры. Таким образом, суждение принимает универсальный характер, т. е. оно пригодно как в случае изучаемой фигуры, так и в случае всех фигур с теми же свойствами.

Основными (неопределяемыми) понятиями геометрии являются: *точка, прямая, плоскость* (как множество точек), *расстояние, величина угла*. Основными отношениями являются: *отношения инцидентности (принадлежности), отношения порядка, отношения конгруэнтности и параллельности*.

Сформулируем высказывания, которые выражают отношения между основными понятиями. Эти высказывания заведомо предполагаются верными и называются *аксиомами*. В них выражаются известные свойства геометрических фигур, которые широко применялись в гимназии.

В данном учебнике использована видоизмененная система аксиом Д. Гильберта, классифицированная по следующим группам:

- 1) аксиомы инцидентности (принадлежности) (**И**);
- 2) аксиомы порядка (**П**);
- 3) аксиомы измерения (**М**) и отложения (**О**) отрезков и углов;
- 4) аксиома существования треугольника, конгруэнтного заданному треугольнику (аксиома перемещения треугольника) (**ПТ**);
- 5) аксиома параллельности (**ПП**).



Давид Гильберт (1862–1943) – немецкий математик



Аксиомы инцидентности (принадлежности)

- И₁** Через любые две различные точки проходит прямая, и только одна.
И₂ Для любой прямой существуют точки, принадлежащие этой прямой, и точки, не принадлежащие ей.

Прямая обозначается строчными буквами латинского алфавита (рис. 4.1 а). Если A и B – две различные точки на прямой, то прямая может быть обозначена AB (рис. 4.1 б). На рисунке 4.1 в) изображены: прямая a , две различные точки A и B , принадлежащие ей ($A \in a$, $B \in a$), и точки C и D , которые не лежат на прямой a ($C \notin a$, $D \notin a$).

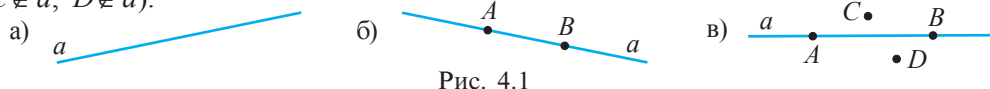


Рис. 4.1



Аксиомы порядка

Аксиомы порядка выявляют отношения между точками, лежащими на прямой. Эти отношения выражаются словами „лежит между“ или „находится между“ и др.

- П₁** Из трех различных точек, лежащих на прямой, одна и только одна находится между двумя другими.

Рассмотрим точки A , B , C , лежащие на прямой a (рис. 4.2). Высказывания 1)–4) эквивалентны.

- 1) Точка C находится между точками A и B .
- 2) Точка C лежит между точками A и B .
- 3) Точки A и B лежат по разные стороны относительно точки C .
- 4) Точки A и C лежат по одну сторону относительно точки B .



Рис. 4.2

- П₂** Для любых двух различных точек A и B , лежащих на прямой, проходящей через них, существует хотя бы одна такая точка C , что B находится между A и C .

- П₃** Любая прямая разбивает множество точек плоскости, не принадлежащих прямой, на два непустых непересекающихся подмножества точек, которые называются **полуплоскостями**, так, что отрезок, соединяющий две точки из различных полуплоскостей ($[AC]$), пересекает прямую, а отрезок, соединяющий две различные точки из одной полуплоскости ($[AB]$), не пересекает прямую (рис. 4.3).

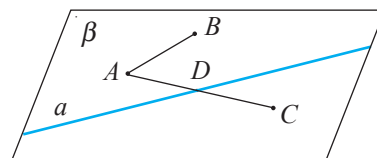


Рис. 4.3



Аксиомы измерения и откладывания отрезков и углов

- М₁** Каждому отрезку ставится в соответствие одно и только одно неотрицательное число, называемое **длиной отрезка**. Длина отрезка равна нулю тогда и только тогда, когда отрезок является нулевым. Длина отрезка равна сумме длин отрезков, на которые он разбивается любой его внутренней точкой.

Длина отрезка $[AB]$ обозначается через AB .

Используя различные единицы измерения (сантиметр, метр, километр, ...), получим различные числовые значения, выражающие длину отрезка.

- М₂** Каждому углу ставится в соответствие одна и только одна градусная мера (величина), заключенная между 0° и 180° . Развернутому углу соответствует 180° , а нулевому углу соответствует 0° . Величина угла равна сумме величин углов, на которые он разбивается любой полупрямой с началом в вершине угла, проходящей через его внутреннюю область.

O₁ Для любого неотрицательного действительного числа p на заданной полупрямой существует единственная точка, которая вместе с началом полупрямой задает отрезок длины p .

O₂ Для любого φ , $0^\circ < \varphi < 180^\circ$, в заданной полуплоскости, ограниченной несущей прямой любой заданной полупрямой, существует единственный угол величины φ , одной из сторон которого является заданная полупрямая.



Аксиома существования треугольника, конгруэнтного данному треугольнику

ПТ (аксиома конгруэнтного перемещения треугольника). Пусть ABC – треугольник и $[A_1M$ – полупрямая. Тогда в заданной полуплоскости, ограниченной прямой A_1M , существует такой треугольник, конгруэнтный треугольнику ABC , что одна из его вершин совпадает с точкой A_1 , вторая вершина, B_1 , принадлежит полупрямой $[A_1M$, а третья вершина, C_1 , принадлежит заданной полуплоскости.

ПП (аксиома параллельности). Через любую точку, не лежащую на данной прямой, проходит одна и только одна прямая, параллельная данной.

Новые понятия в геометрии обычно вводят с помощью *определений*.

Примеры

1. Прямая, которая проходит через середину отрезка и перпендикулярна к нему, называется *серединным перпендикуляром (медиатрисой) отрезка*.
2. Отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны треугольника, называется *медианой треугольника*.
3. Точки, принадлежащие одной и той же прямой, называются *коллинеарными точками*. В противном случае точки называются *неколлинеарными точками*.

О Запомните!

Теорема – это утверждение, устанавливающее некоторое свойство и требующее доказательства. Знаем, что большинство теорем, встречающихся в курсе геометрии, формулируются (или могут быть сформулированы) следующим образом: „Если A , то B “, где A и B являются предложениями, которые называются соответственно *условием* и *заключением* теоремы (см. Модуль 2).

Условие теоремы называется *достаточным условием* для заключения, а заключение теоремы называется *необходимым условием* для условия теоремы.

Доказательство теоремы – это цепь верных умозаключений, основанных на аксиомах, теоремах или уже доказанных утверждениях.

Пример

Рассмотрим схематичное доказательство теоремы:

„Если фигура ABC является треугольником, то сумма величин его внутренних углов равна 180° “.

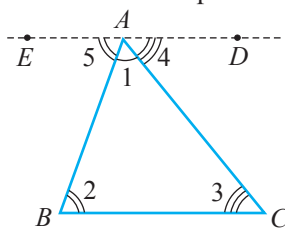


Рис. 4.4

Проведем $AD \parallel BC$ (рис. 4.4).

$$S = m(\angle 1) + m(\angle 2) + m(\angle 3),$$

$\angle 2 \equiv \angle 5$ (внутренние накрест лежащие углы), $\angle 3 \equiv \angle 4$ (внутренние накрест лежащие углы),

следовательно, $S = m(\angle 1) + m(\angle 4) + m(\angle 5)$.

$m(\angle 1) + m(\angle 4) + m(\angle 5) = 180^\circ$, так как $\angle EAD$ – развернутый угол.

Таким образом, $S = 180^\circ$.

В процессе этого доказательства мы использовали теоремы о конгруэнтности внутренних накрест лежащих углов (теорема 2). Доказательство также опирается на аксиому параллельности (ПП) и аксиому M_2 .

Неявно использованы и определения: определение параллельных прямых, секущей, угла, треугольника, внутренних накрест лежащих углов.

Также неявно присутствуют неопределяемые понятия: „точка“, „прямая“, „равенство“.

Применяются и разные логические операции.

Рассмотрим высказывание: „Если I , то C “ (1).

Поменяв местами в высказывании (1) условие и заключение, мы получим новое высказывание: „Если C , то I “ (2).

Эти два высказывания могут быть:

- 1) оба верны,
- 2) одно из них верно, другое неверно,
- 3) оба неверны.

Если оба высказывания верны, то они являются теоремами и называются **взаимно обратными теоремами**. Как правило, одна из этих теорем называется **прямой теоремой**, а другая – **обратной** (см. Модуль 2).

Примеры

1. Теорема „Если две хорды некоторой окружности равноудалены от ее центра, то они конгруэнтны“ является обратной к теореме „Если две хорды некоторой окружности конгруэнтны, то они равноудалены от центра окружности“.
2. Обратное высказывание для теоремы „Если четырехугольник является прямоугольником, то его диагонали конгруэнтны“ формулируется следующим образом: „Если диагонали некоторого четырехугольника конгруэнтны, то он является прямоугольником“. Это ложное высказывание.

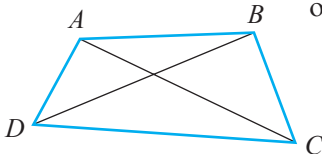


Рис. 4.5

На рисунке 4.5 изображен четырехугольник $ABCD$ с конгруэнтными диагоналями AC и BD , но $ABCD$ не является прямоугольником.

3. Взаимно обратные высказывания „Если четырехугольник является прямоугольником, то его стороны конгруэнтны“ и „Если стороны четырехугольника конгруэнтны, то он является прямоугольником“ оба ложны.

В некоторых случаях утверждения двух взаимно обратных теорем формулируются в виде одной теоремы при помощи словосочетания „необходимое и достаточное условие“ или „если и только если“, или „тогда и только тогда“.

Например, две взаимно обратные теоремы из примера 1 можно сформулировать так: „Для того, чтобы две хорды одной и той же окружности были конгруэнтны, необходимо и достаточно, чтобы они были равноудалены от ее центра“ или „Две хорды одной и той же окружности равноудалены от ее центра тогда и только тогда, когда они конгруэнтны“.

Высказывание „Диагонали ромба взаимно перпендикулярны“ является теоремой. Она может быть сформулирована в виде: „Если параллелограмм является ромбом, то его диагонали взаимно перпендикулярны“. Теперь легко сформулировать обратное высказывание: „Если диагонали параллелограмма взаимно перпендикулярны, то он является ромбом“. Оно также является теоремой.

Часто доказательство прямой теоремы вызывает трудности, поэтому вместо этой теоремы доказывают теорему, противоположную обратной. В этом состоит **метод доказательства от противного**. В доказательствах методом от противного истинность заключения следует из ложности его отрицания (см. Модуль 2).

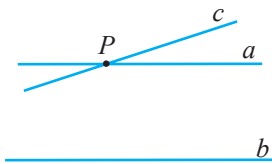
Пример

Рис. 4.6

Теорема. Если две различные прямые параллельны, то всякая прямая, пересекающая одну из них, пересекает и другую.

Условие. $a \parallel b$, $c \parallel a$, $c \cap a = \{P\}$ (рис. 4.6).

Заключение. $c \parallel b$.

Доказательство. Применим метод от противного.

Если предположим, что $c \not\parallel b$, то через точку P пройдут две различные прямые a и c , параллельные прямой b . Но это противоречит аксиоме **ПП** параллельности. Следовательно, так как c и b не могут быть параллельными, они должны иметь общую точку.

Напомним названия пар углов, которые образуются при пересечении двух различных прямых третьей прямой, называемой **секущей**.

Пары углов (рис. 4.7) называются:

- (1, 5), (4, 8), (2, 6), (3, 7) – **соответственными углами**;
- (4, 6), (3, 5) – **внутренними накрест лежащими углами**;
- (1, 7), (2, 8) – **внешними накрест лежащими углами**;
- (4, 5), (3, 6) – **внутренними односторонними углами**;
- (1, 8), (2, 7) – **внешними односторонними углами**.

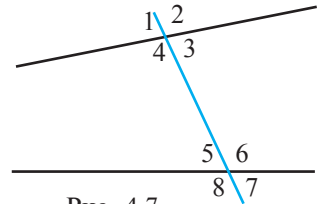


Рис. 4.7

Теорема 1

Если при пересечении двух прямых секущей образуются (рис. 4.8):

- 1) либо два конгруэнтных внутренних накрест лежащих угла;
- 2) либо два конгруэнтных внешних накрест лежащих угла;
- 3) либо два конгруэнтных соответственных угла;
- 4) либо два дополнительных до 180° внутренних односторонних угла;
- 5) либо два дополнительных до 180° внешних односторонних угла, то конгруэнтны все внутренние накрест лежащие углы, все внешние накрест лежащие углы; также дополнительные до 180° все внутренние односторонние углы и все внешние односторонние углы.

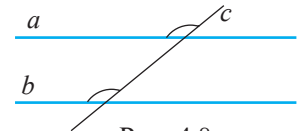


Рис. 4.8

Теорема 2

Две различные прямые параллельны, если и только если конгруэнтны внутренние накрест лежащие углы, образованные при пересечении этих прямых секущей (рис. 4.9).

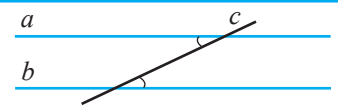


Рис. 4.9

Теорема 3

Две различные прямые параллельны тогда и только тогда, когда конгруэнтны внешние накрест лежащие углы, образованные при пересечении этих прямых секущей (рис. 4.10).

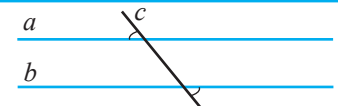


Рис. 4.10

Теорема 4

Две различные прямые параллельны тогда и только тогда, когда сумма величин внутренних односторонних углов, образованных при пересечении этих прямых секущей, равна 180° (рис. 4.11).

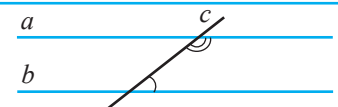


Рис. 4.11

Теорема 5

Соответственные углы, образованные при пересечении прямых a и b секущей c , равны тогда и только тогда, когда $a \parallel b$.

Теорема 6

(свойство углов с соответствующими параллельными сторонами)

Два угла, стороны которых соответственно параллельны, конгруэнтны, если они оба острые либо тупые, и являются дополнительными до 180° , если один угол острый, а другой тупой.

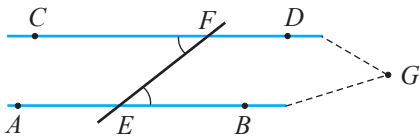


Рис. 4.12

Докажем, например, теорему 2.

Пусть при пересечении прямых AB и CD секущей EF образуются конгруэнтные внутренние накрест лежащие углы CFE и FEB (рис. 4.12). Докажем, что прямые AB и CD параллельны.

Применим метод доказательства от противного. Предположим, что прямые AB и CD не параллельны. Тогда они должны пересекаться в некоторой точке G . Следовательно, точки E, F, G будут вершинами треугольника EFG , у которого внешний угол CFE конгруэнтен внутреннему углу BEF , не смежному с ним. Но это противоречит свойству о том, что внешний угол треугольника больше любого внутреннего угла, не смежного с ним. Отсюда следует, что прямые AB и CD не могут пересекаться, значит, они параллельны.

Допустим теперь, что прямые AB и CD параллельны, и докажем, что внутренние накрест лежащие углы CFE и FEB , образованные при их пересечении секущей EF , конгруэнтны.

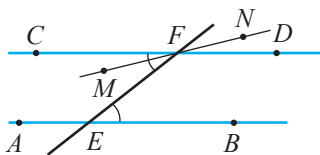


Рис. 4.13

Рассуждаем от противного. Предположим, что углы CFE и FEB не конгруэнтны, например, $m(\angle CFE) > m(\angle FEB)$ (рис. 4.13). Из этого предположения следует, что через точку F можно провести прямую MN , отличную от прямой CD , так, что $m(\angle MFE) = m(\angle FEB)$. Согласно доказанному выше, прямые MN и AB параллельны, так как при их пересечении секущей EF получаются конгруэнтные внутренние накрест лежащие углы ($\angle MFE$ и $\angle BEF$). Отсюда следует, что через точку F проходят две различные прямые (CD и MN), параллельные прямой AB . Но это противоречит аксиоме параллельности **ПП**.

Полученное противоречие доказывает, что углы CFE и BEF конгруэнтны. ►

Следствия

1. Если две прямые параллельны, то любая прямая, перпендикулярная одной из них, перпендикулярна и второй.
2. Две прямые, перпендикулярные третьей, параллельны.
3. Прямые, перпендикулярные пересекающимся прямым, пересекаются.



Задание

- Докажите теоремы 1, 3–6.

Задачи



Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт

А

1. Сформулируйте определение:
 - а) диагонали многоугольника;
 - б) хорды окружности;
 - в) биссектрисы угла треугольника;
 - г) ромба.
2. Даны высказывания:
 - а) „Объединение отрезков $[A_1A_2], [A_2A_3], \dots, [A_{n-1}A_n]$ называется ломаной“;
 - б) „Квадрат – это параллелограмм, стороны которого равны“.

Дополните эти высказывания, чтобы они стали верными определениями.
3. Сформулируйте „условие“ и „закключение“ высказывания:
 - а) Два вертикальных угла конгруэнтны.
 - б) Диаметр окружности больше любой хорды, которая не проходит через центр этой окружности.
 - в) Два треугольника конгруэнтны, если их стороны конгруэнтны.
 - г) Две прямые, которые имеют две различные общие точки, совпадают.

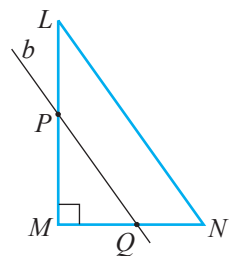
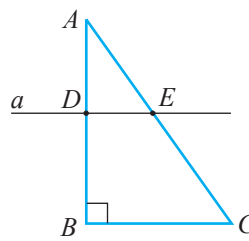
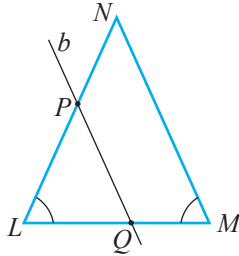
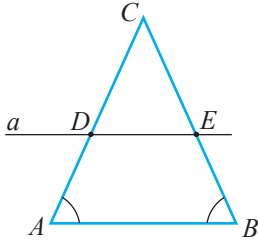
4.  **Исследуйте!** Выясните, какие из следующих высказываний истинны. Какие из них имеют истинные обратные высказывания?

- Величина тупого угла больше величины острого угла.
- Треугольник, у которого две конгруэнтные стороны, имеет и два конгруэнтных угла.
- Сумма величин смежных углов равна 180° .
- Если диагонали выпуклого четырехугольника конгруэнтны, то он является прямоугольником.



В

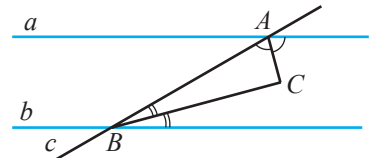
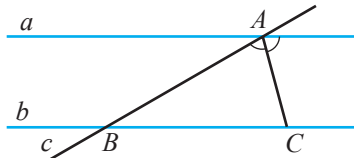
5. На рисунке треугольники ABC и LMN равнобедренные. Прямая $a \parallel AB$, прямая $b \parallel MN$. Докажите, что треугольники CDE и LQP равнобедренные.
6. На рисунке изображены прямоугольные треугольники ABC и LMN . Прямая $a \parallel BC$, прямая $b \parallel LN$. Докажите, что треугольники ADE и PMQ прямоугольные.



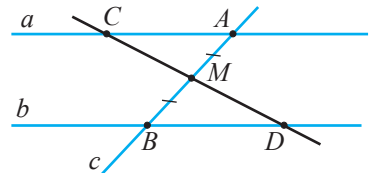
С

7. На рисунке прямые a и b параллельны, c – секущая, $[AC]$ и $[BC]$ – биссектрисы. Докажите, что $AC \perp BC$.

8.  **Работайте в парах!** На рисунке прямые a и b параллельны, c – секущая, $[AC]$ – биссектриса. Докажите, что $[AB] \equiv [BC]$.



9. На рисунке прямые a и b параллельны, точка M – середина отрезка AB , CD – секущая, проходящая через точку M . Покажите, что M – середина отрезка CD .



Реальный профиль

А₁

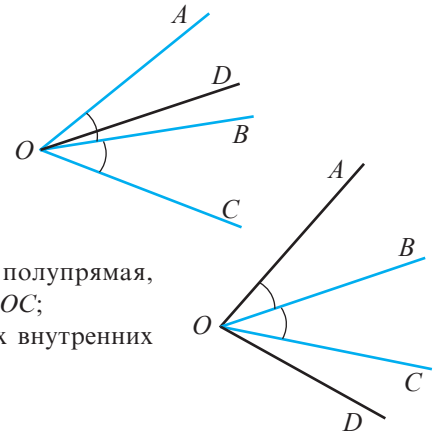
1.  **Работайте в парах!** Пусть P обозначает четырехугольник. Рассмотрим предложения:
- P является прямоугольником;
 - P имеет конгруэнтные стороны;
 - P имеет конгруэнтные углы;
 - P имеет конгруэнтные диагонали.
- а) Сформулируйте три высказывания, имеющие в качестве условия предложение 1) и в качестве заключения соответственно предложения 2), 3) и 4).
- б) Выясните, какие из этих высказываний ложны, и для каких из них обратные высказывания истинны.

В₁

2. Пусть прямые a и b , лежащие в плоскости P , пересекаются в точке A . Опишите фигуру:
- $a \cap b$, $a \cap P$, $b \cup P$;
 - $(a \cap b) \cup P$, $\{A\} \cap (a \cup b)$.
3.  **Исследуйте!** Пусть D_1 и D_2 – плоские прямоугольники. При каких условиях $D_1 \cup D_2$ является плоским прямоугольником? А $D_1 \cap D_2$?

4. Докажите, что:

- биссектрисы двух смежных углов перпендикулярны;
- два угла с общей вершиной, у которых соответствующие стороны перпендикулярны, конгруэнтны или дополнительные до 180° ;
- величина угла BOD , где $[OB]$ – биссектриса угла AOC , а полупрямая $[OD]$ проходит между сторонами угла AOB , равна полуразности величины углов DOC и DOA ;
- величина угла BOD , где $[OB]$ – биссектриса угла AOC , а $[OD]$ – полупрямая, проходящая вне угла AOC , равна полусумме величин углов DOA и DOC ;
- величина внешнего угла треугольника равна сумме величин двух внутренних углов, не смежных с ним.



C₁

5. Пусть T_1 и T_2 – плоские конгруэнтные треугольники. Каким образом нужно расположить эти фигуры на плоскости, чтобы:

- $T_1 \cap T_2$ – плоский шестиугольник;
- $T_1 \cup T_2$ – плоский треугольник;
- $T_1 \cup T_2$ – плоский параллелограмм?

§2 Окружность и круг



О ВСПОМНИМ

Окружностью с центром O радиуса R , $R > 0$, называется множество точек плоскости, расположенных на расстоянии R от точки O . Обозначается $\mathcal{C}(O, R)$ (рис. 4.14 а)).



Круг с центром O радиуса R , $R > 0$, образован множеством таких точек плоскости, что расстояние от каждой из них до точки O не больше R . Обозначается $\mathcal{D}(O, R)$ (рис. 4.14 б)).

Множество точек плоскости, отстоящих от центра O окружности на расстояниях меньших/больших радиуса R окружности, называется *внутренней/внешней областью окружности* $\mathcal{C}(O, R)$.

Взаимное расположение прямой a и окружности $\mathcal{C}(O, R)$ изображено на рисунке 4.15. Прямая a является:

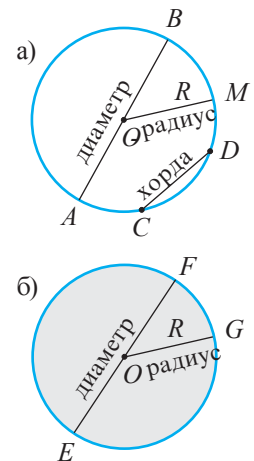
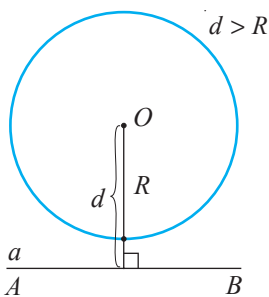
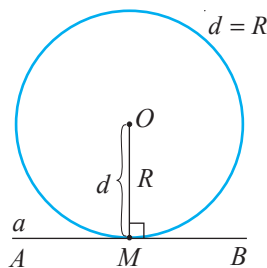


Рис. 4.14

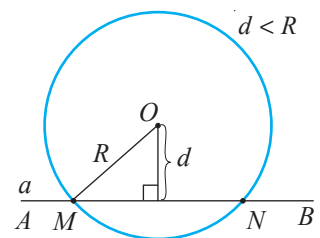


а) *внешней к окружности*



б) *касательной к окружности в точке M*

Рис. 4.15



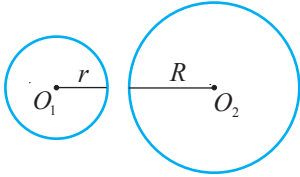
в) *секущей к окружности в точках M и N*

Факт, что прямая a касается окружности $\mathcal{C}(O, R)$ в точке M (рис. 4.15 б)), означает, что:

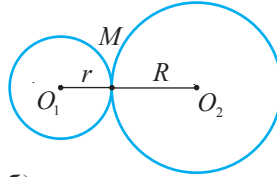
- 1) точка M – единственная общая точка окружности и прямой;
- 2) прямая a перпендикулярна радиусу OM в точке M ;
- 3) расстояние от центра O до прямой a равно R ($d = R$).

Взаимное расположение двух окружностей изображено на рисунке 4.16.

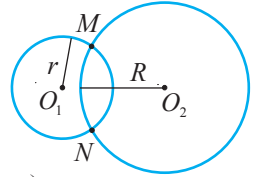
Окружности $\mathcal{C}(O_1, r)$ и $\mathcal{C}(O_2, R)$:



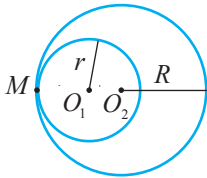
а) являются внешними относительно друг друга



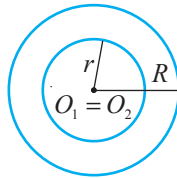
б) касаются внешне в точке M



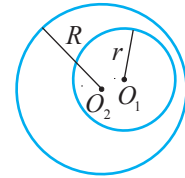
в) пересекаются в точках M и N



г) касаются внутренне в точке M



д) концентрические



е) I – внутренняя относительно второй, II – внешняя относительно первой

Рис. 4.16



Теорема 7

Отрезки касательных, проведенных из внешней точки к окружности, конгруэнтны ($[AT_1] \equiv [AT_2]$). Биссектриса угла, образованного этими касательными, проходит через центр окружности (рис. 4.17).

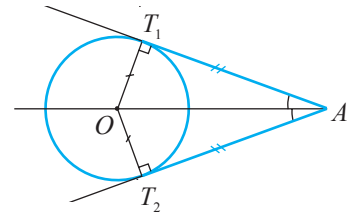


Рис. 4.17



Задание

- Докажите теорему 7.

Запомните!

- Два вписанных в окружность угла, опирающихся на одну и ту же дугу, равны: $m(\angle BAC) = m(\angle BDC)$ (рис. 4.18).
- Центральный угол, соответствующий дуге BC , равен удвоенному вписанному углу, соответствующему дуге BC : $m(\angle BOC) = 2m(\angle BAC) = 2m(\angle BDC)$ (рис. 4.18).

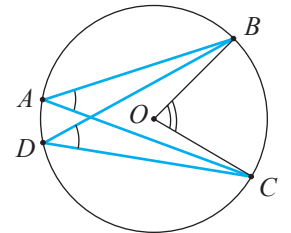


Рис. 4.18

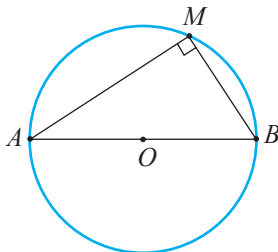


Рис. 4.19

- Если M – точка на окружности $\mathcal{C}$ с центром O и диаметром AB , причем M отлична от A и B , то $m(\angle AMB) = 90^\circ$.

Наоборот, если $m(\angle AMB) = 90^\circ$, то точка M расположена на окружности с диаметром AB (рис. 4.19).

- Если через точку A окружности $\mathcal{C}$ провести касательную AB и хорду AC , то $m(\angle BAC) = \frac{1}{2}m(\angle AOC) = m(\angle ADC)$, $DC \parallel AB$ (рис. 4.20).

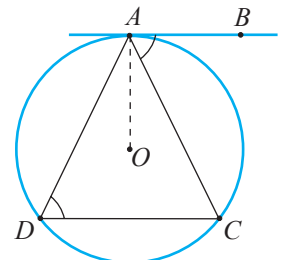


Рис. 4.20

Теорема 8

Степень точки относительно окружности

Если прямая, проходящая через точку M , пересекает окружность в точках A и B , то произведение $AM \cdot MB$ не зависит от выбора прямой (рис. 4.21).

Доказательство:

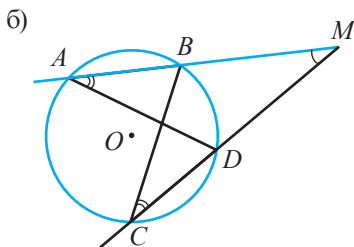
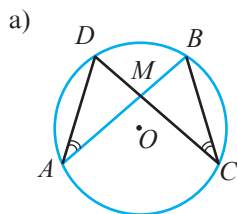


Рис. 4.21

1) Рассмотрим случай, когда точка M не принадлежит окружности, то есть она лежит либо внутри окружности (рис. 4.21 а)), либо вне окружности (рис. 4.21 б)).

Проведем через точку M две прямые: первая пересекает окружность в точках A и B , а вторая – в точках C и D . Строим отрезки BC и AD и получаем, что $\triangle ADM \sim \triangle CBM$. Поскольку стороны этих треугольников пропорциональны, то

$$\frac{AD}{BC} = \frac{AM}{MC} = \frac{DM}{MB} \Rightarrow AM \cdot MB = MC \cdot DM.$$

2) Если точка M лежит на окружности (рис. 4.22), то эта точка является концом хорды, то есть точка M делит хорду на два отрезка, из которых один нулевой. В этом случае, $AM \cdot MB = MM \cdot AB = 0 \cdot AB = 0$. ►

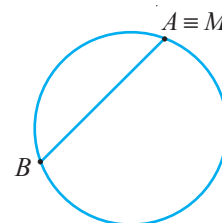


Рис. 4.22

Запомните!

Произведение $AM \cdot MB$ называется **степенью точки относительно данной окружности**.

Кроме того, $MA \cdot MB = R^2 - a^2$, когда точка M находится внутри окружности и $MA \cdot MB = a^2 - R^2$, когда точка M находится вне окружности, где R – радиус окружности, а a – расстояние от точки M до центра окружности.

Задачи



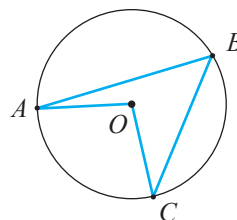
Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт

А

1. Две окружности радиусов 15 см и 25 см касаются внешне. Найдите расстояние между их центрами.
2. Две окружности радиусов 18 см и 30 см касаются внутренним образом. Найдите расстояние между их центрами.
3. Точки A, B, C и D лежат на окружности. Найдите величину угла ACD , если известно, что $m(\angle ABD) = 50^\circ$.

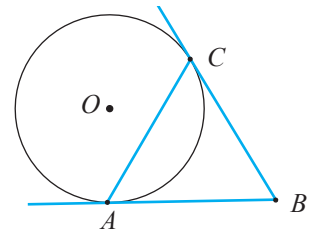
В

4. Точки A, B, C принадлежат окружности радиуса 18 см. Найдите длину хорды AC , если величина угла ABC равна 30° .
5. (ЕГЭ 2023) На рисунке точки A, B и C принадлежат окружности с центром O таким образом, что $m(\angle ABC) = 50^\circ$ и $m(\angle AOC) = (3x - 50)^\circ$. Найдите значение x .



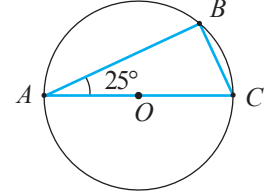
6. (ЕАН, 2021) На рисунке прямые BA и BC являются касательными к окружности с центром O в точках A и C соответственно, а $m(\angle ABC) = 60^\circ$. Впишите в рамку длину хорды AC , если известно, что $AB = 7$ см.

$$AC = \boxed{} \text{ см.}$$



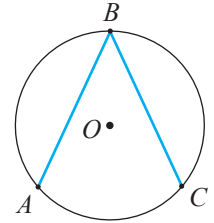
7. (ЕАН, 2015) Точки A , B и C принадлежат окружности так, что AC является диаметром и $m(\angle BAC) = 25^\circ$ (см. рисунок). Впишите в рамку величину угла ACB .

$$m(\angle ACB) = \boxed{}^\circ.$$



8. (ЕАН, 2019) На рисунке хорды AB и BC конгруэнтны. Впишите в рамку величину малой дуги AB (в градусах), если величина малой дуги AC равна 100° .

$$m(\text{дуга } AB) = \boxed{}^\circ.$$



9. Дана окружность, у которой хорды AD и BC пересекаются. Зная, что $m(\angle ABC) = 40^\circ$, $m(\angle ACD) = 100^\circ$, найдите величину угла CAD .

С

10. (ЕАН, 2017) **Работайте в парах!** Хорды AC и BD окружности пересекаются в точке E . Известно, что $AC = 20$ см, $BE = 6$ см и $AE : EC = 2 : 3$. Найдите длину отрезка ED .

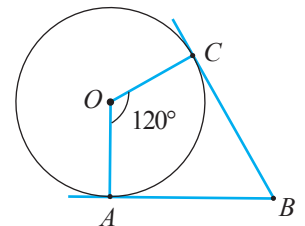
Реальный профиль

А₁

- Докажите, что медиана, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, делит его на два равнобедренных треугольника.
- Докажите, что прямая, проходящая через точку касания двух внешне касающихся окружностей, делит эти окружности так, что дуги, расположенные в разных полуплоскостях, ограниченных этой прямой, имеют одинаковые величины.
- Через точку касания A двух внешне касающихся окружностей проведены две прямые, которые пересекают одну из окружностей в точках C и B , а другую – в точках D и E . Докажите, что треугольники с вершинами A , B , C и A , D , E подобны и что $DE \parallel BC$.

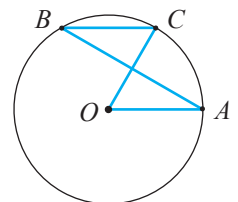
4. (ЕАН, 2021) На рисунке прямые BA и BC являются касательными к окружности с центром O в точках A и C соответственно. Впишите в рамку величину угла ABC (в градусах), если известно, что $m(\angle AOC) = 120^\circ$.

$$m(\angle ABC) = \boxed{}.$$



5. (ЕАН, 2017) На рисунке точки A , B и C принадлежат окружности с центром O так, чтобы $m(\angle ABC) = 30^\circ$. Впишите в рамку величину (в градусах) угла AOC .

$$m(\angle AOC) = \boxed{}.$$



В₁

6. Две окружности пересекаются в точках A и B . Через точку A проведена прямая, которая пересекает эти окружности в точках C и D . Докажите, что величина угла CBD не зависит от прямой, проведенной через точку A .
7.  **Работайте в парах!** Из точки A , внешней к некоторой окружности, проведены две касательные к окружности в точках B и C . К дуге BC , лежащей во внутренней области треугольника ABC , проведена касательная, которая пересекает отрезки AB и AC в точках B_1 и C_1 соответственно. Докажите, что периметр треугольника AB_1C_1 равен $2AB$, и он не зависит от расположения точки касания на дуге BC .
8. Две окружности касаются внешним образом в точке A . Общая внешняя касательная касается этих окружностей в точках B и C . Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.
9. Пусть $[AA_1]$ – высота остроугольного треугольника ABC и точка O – центр окружности, описанной около этого треугольника. Докажите, что $\angle BAA_1 \equiv \angle OAC$.
10. Две окружности пересекаются в точках A и B . Из точки C , расположенной на прямой AB , внешней к отрезку AB , проведены к этим окружностям две касательные в точках D и E . Докажите, что отрезки CE и CD конгруэнтны.

С₁

11. Пусть ABC – треугольник, $[AA_1]$ и $[BB_1]$ – его высоты и точка O – центр окружности, описанной около этого треугольника. Докажите, что:
 - а) около четырехугольника AB_1A_1B можно описать окружность;
 - б) прямая OC перпендикулярна прямой A_1B_1 .
12. Две окружности радиусов R и r касаются внешне. Найдите длину отрезка, заданного точками касания их общей внешней касательной.
13. Даны точки A и B и угол φ . Постройте множество точек M плоскости, при которых $m(\angle AMB) = \varphi$. (Говорят также, что отрезок AB виден из точки M под углом φ .)
14. Точка P находится на расстоянии 7 см от центра окружности радиусом 11 см. Через эту точку проведена хорда длиной 18 см. Найдите длины отрезков, на которых точка P делит эту хорду.
15. Из точки A вне окружности проведены касательная и секущая. Расстояние от точки A до точки касания равно 16 см, а до одной из точек пересечения секущей с окружностью – 32 см. Найдите радиус окружности, если расстояние от центра окружности до секущей равно 5 см.

§3 Треугольники. Конгруэнтность треугольников. Классификации

О Вспомним



определения

- Два замкнутых отрезка называются **конгруэнтными**, если их длины равны.
- Два угла называются **конгруэнтными**, если их величины равны.

Конгруэнтность углов AOB и $A_1O_1B_1$ обозначается $\angle AOB \equiv \angle A_1O_1B_1$, а конгруэнтность отрезков AB и A_1B_1 обозначается $[AB] \equiv [A_1B_1]$.



определение

Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ называются **конгруэнтными**, если справедливы соотношения:

$$[AB] \equiv [A_1B_1], [BC] \equiv [B_1C_1], [CA] \equiv [C_1A_1], \\ \angle BAC \equiv \angle B_1A_1C_1, \angle ACB \equiv \angle A_1C_1B_1, \angle CBA \equiv \angle C_1B_1A_1.$$

Обозначается: $\triangle ABC \equiv \triangle A_1B_1C_1$.

Отметим, что из того, что $\triangle ABC \equiv \triangle A_1B_1C_1$ не следует, что $\triangle ABC \equiv \triangle A_1C_1B_1$, то есть при конгруэнтности треугольников порядок записи вершин имеет значение.

Можно доказать, что два треугольника, конгруэнтные третьему, конгруэнтны. Напомним **признаки конгруэнтности** двух треугольников.

I признак СУС (Сторона Угол Сторона). Если для треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ справедливы соотношения $[AB] \equiv [A_1B_1]$, $[AC] \equiv [A_1C_1]$ и $\angle BAC \equiv \angle B_1A_1C_1$, то $\triangle ABC \equiv \triangle A_1B_1C_1$ (рис. 4.23 а)).

II признак УСУ (Угол Сторона Угол). Если для треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ справедливы соотношения $\angle BAC \equiv \angle B_1A_1C_1$, $[AB] \equiv [A_1B_1]$, $\angle ABC \equiv \angle A_1B_1C_1$, то $\triangle ABC \equiv \triangle A_1B_1C_1$ (рис. 4.23 б)).

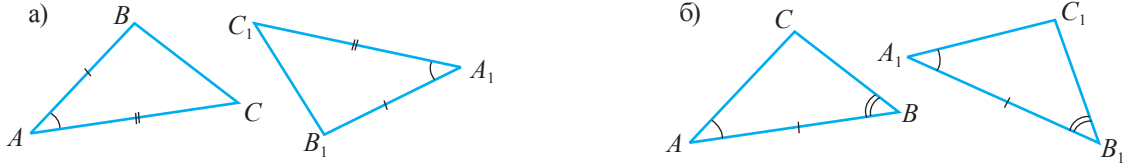


Рис. 4.23

Вспомним

Определение

Равнобедренным треугольником называется треугольник, у которого две стороны конгруэнтны.

Теорема 9

В равнобедренном треугольнике углы при основании конгруэнтны.

Определение

Треугольник, у которого все стороны конгруэнтны, называется **равносторонним**.

III признак ССС (Сторона Сторона Сторона). Если для треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ справедливы соотношения $[AB] \equiv [A_1B_1]$, $[BC] \equiv [B_1C_1]$, $[CA] \equiv [C_1A_1]$, то $\triangle ABC \equiv \triangle A_1B_1C_1$.

Доказательство:

Пусть $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ удовлетворяют условию теоремы (рис. 4.24).

Тогда по аксиоме ПТ существует

$\triangle A_1B_1C_2$ такой, что $\triangle A_1B_1C_2 \equiv \triangle ABC$ (1).

Из (1) получаем:

$$[C_1A_1] \equiv [CA] \equiv [C_2A_1],$$

$$[C_1B_1] \equiv [CB] \equiv [C_2B_1].$$

Соединив точки C_1 и C_2 , получим равнобедренные треугольники $\triangle C_2A_1C_1$ и $\triangle C_2B_1C_1$, для которых справедливы соотношения $\angle A_1C_1C_2 \equiv \angle A_1C_2C_1$ и $\angle C_2C_1B_1 \equiv \angle C_1C_2B_1$. Отсюда следует, что $\angle A_1C_1B_1 \equiv \angle A_1C_2B_1$ и по I признаку (СУС) получаем, что $\triangle A_1B_1C_1 \equiv \triangle A_1B_1C_2$.

Так как $\triangle A_1B_1C_2 \equiv \triangle ABC$, то $\triangle ABC \equiv \triangle A_1B_1C_1$. ►

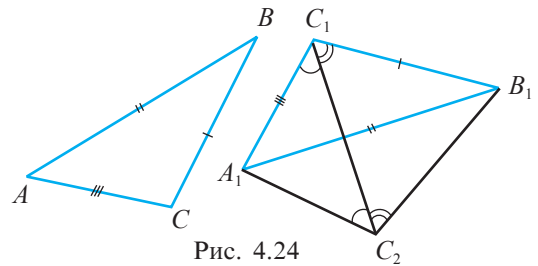


Рис. 4.24



Задание

• Докажите I и II признаки конгруэнтности треугольников.

○ Вспомним

Угол, смежный с внутренним углом треугольника, называется **внешним углом** треугольника.

Т еорема 10

(свойство внешнего угла треугольника)

Величина внешнего угла треугольника больше величины любого внутреннего угла, не смежного с ним.

Доказательство:

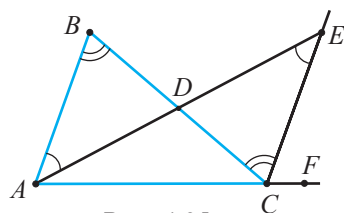


Рис. 4.25

Докажем, что величина внешнего угла FCB треугольника ABC больше величины внутреннего угла ABC (рис. 4.25). Для этого на стороне BC отметим точку D так, что $[BD] \equiv [DC]$, а на полупрямой $[AD]$ возьмем точку E так, чтобы точка D лежала бы между точками A и E и $[AD] \equiv [DE]$. Поскольку точки A и E лежат в разных полуплоскостях, заданных прямой BC , а точка A лежит на луче, дополнительному лучу $[DE]$, получаем, что точка E принадлежит внутренней области угла FCB .

Применяя аксиому M_2 , выводим, что $m(\angle FCB) > m(\angle ECD)$.

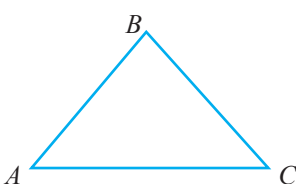
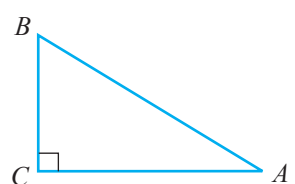
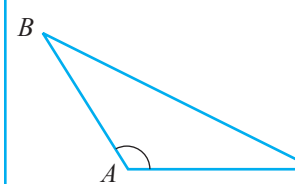
Согласно I признаку (СУС) конгруэнтности треугольников заключаем, что $\triangle ABD \equiv \triangle ECD$ и, следовательно, $m(\angle ABC) = m(\angle ECD) < m(\angle FCB)$.

Аналогично доказывается, что $m(\angle FCB) > m(\angle BAC)$. ►

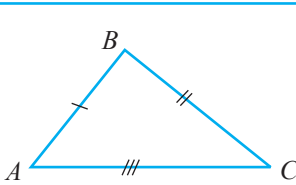
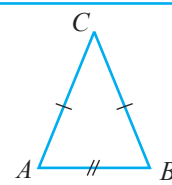
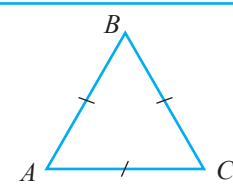
○ Вспомним

Напомним, что треугольники классифицируются по:

✓ Углом

Остроугольный треугольник	Прямоугольный треугольник	Тупоугольный треугольник
 Все углы острые: $m(\angle A) < 90^\circ$, $m(\angle B) < 90^\circ$, $m(\angle C) < 90^\circ$.	 Один угол прямой: $m(\angle C) = 90^\circ$.	 Один угол тупой: $m(\angle A) > 90^\circ$.

✓ Сторонам

Произвольный треугольник	Равнобедренный треугольник	Равносторонний треугольник
 Все стороны имеют неравные длины: $AB \neq AC$, $AB \neq BC$, $AC \neq BC$.	 Две стороны конгруэнтны: $AC = BC$.	 Все стороны конгруэнтны: $AB = AC = BC$.

Задание
с решением

Боковая сторона равнобедренного треугольника в два раза длиннее основания. Найдите длины сторон треугольника, если его полупериметр равен 40 см.

Решение:

Периметр треугольника ABC равен 80 см, значит, $AB + AC + BC = 80$ см.

Поскольку $AC = AB = 2BC$, получим: $5BC = 80$ см $\Leftrightarrow BC = 16$ см.

Тогда $AC = AB = 2BC = 32$ см.

Ответ: 16 см, 32 см, 32 см.

Задачи



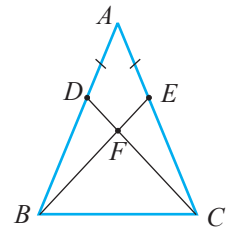
Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт

А

1. Отрезки AB и CD делятся в точке пересечения пополам. Найдите длину отрезка AC , если $BD = 12$ см.
2. Прямая проходит через середину отрезка AB . Найдите расстояние от точки B до этой прямой, если расстояние от точки A до заданной прямой равно 8 см.
3. Периметр равнобедренного треугольника равен 100 см, а длина его основания равна 40 см. Найдите длину боковой стороны.
4. Вычислите периметр равнобедренного треугольника с основанием 20 см и боковой стороной 40 см.

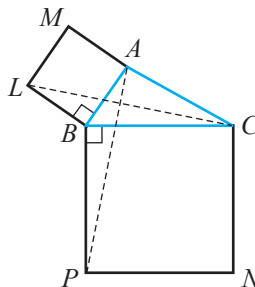
В

5.  **Работайте в парах!** Периметр равнобедренного треугольника равен 44 см. Найдите стороны треугольника, если его основание на 4 см меньше боковой стороны.
6. Периметр равнобедренного треугольника равен 56 см. Найдите стороны треугольника, если длина его боковой стороны на 2 см меньше его основания.
7. На конгруэнтных сторонах AB и AC равнобедренного треугольника ABC построены конгруэнтные отрезки AD и AE . Найдите длину отрезка BF , если $CF = 3$ см. (Указание. $\triangle CDA \equiv \triangle BEA \Rightarrow \triangle CFB$ – равнобедренный.)

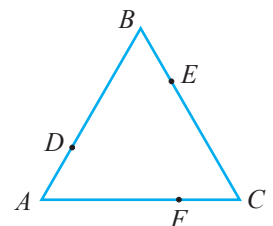


С

8.  **Исследуйте!** На сторонах AB и BC произвольного треугольника ABC вне треугольника построены квадраты $ABLM$ и $BCNP$. Докажите, что $\triangle LBC \equiv \triangle ABP$.



9. На сторонах равностороннего треугольника ABC построены конгруэнтные отрезки AD , BE и CF , как на рисунке. Найдите стороны треугольника $\triangle DEF$, если $DE = 3$ см.



Реальный профиль

A₁

- Докажите, что:
 - высоты, проведенные к боковым сторонам равнобедренного треугольника, конгруэнтны;
 - биссектрисы углов при основании равнобедренного треугольника конгруэнтны;
 - медианы боковых сторон равнобедренного треугольника конгруэнтны.
- ( 2014) Периметр равнобедренного треугольника равен 32 см. Длина основания треугольника на 2 см больше длины каждой из конгруэнтных сторон. Найдите, чему равна высота, проведенная к основанию.
- Докажите, что точка, равноудаленная от сторон угла, лежит на биссектрисе этого угла.
- ( 2019) Биссектриса BK треугольника ABC делит сторону AC на отрезки $AK = 4$ см и $KC = 2$ см. Найдите длину стороны AB , если известно, что $BC = 3$ см.
- Через середину отрезка проведена прямая. Докажите, что концы отрезка равноудалены от этой прямой.
-  **Работайте в парах!** На боковых сторонах AB и AC равнобедренного треугольника ABC соответственно взяты точки B_1 и C_1 так, что $AB_1 = AC_1$. Докажите, что:
 - $\triangle AB_1C \equiv \triangle AC_1B$;
 - $\triangle CB_1B \equiv \triangle BC_1C$.

B₁

- Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ конгруэнтны. Докажите, что:
 - медианы AM и A_1M_1 конгруэнтны;
 - биссектрисы AL и A_1L_1 конгруэнтны.
- Даны треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ и их медианы AM и A_1M_1 соответственно. Докажите, что эти треугольники конгруэнтны, если $[AM] \equiv [A_1M_1]$, $[AB] \equiv [A_1B_1]$ и $[BC] \equiv [B_1C_1]$.
- Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ конгруэнтны, если $[AC] \equiv [A_1C_1]$, $[AB] \equiv [A_1B_1]$ и $[AM] \equiv [A_1M_1]$, где $[AM]$ и $[A_1M_1]$ – медианы треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно.
- Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ конгруэнтны, если $[BC] \equiv [B_1C_1]$, $[AM] \equiv [A_1M_1]$ и $\angle CMA \equiv \angle C_1M_1A_1$, где $[AM]$ и $[A_1M_1]$ – медианы треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно.

C₁

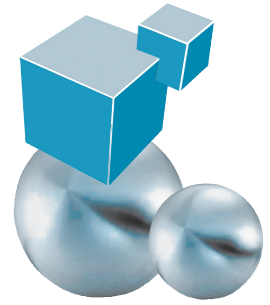
-  **Исследуйте!** Докажите, что длина медианы треугольника меньше полусуммы длин сторон, исходящих из той же вершины треугольника, что и медиана.
-  **Работайте в парах!** Докажите, что сумма длин медиан треугольника больше полупериметра треугольника и меньше его периметра.
- Даны треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ и их медианы $[AM]$ и $[A_1M_1]$. Известно, что $[AM] \equiv [A_1M_1]$, $\angle MAC \equiv \angle M_1A_1C_1$ и $\angle MAB \equiv \angle M_1A_1B_1$. Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ конгруэнтны.
- Даны треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ и их биссектрисы AL и A_1L_1 . Известно, что $[AB] \equiv [A_1B_1]$, $[AL] \equiv [A_1L_1]$ и $\angle BAC \equiv \angle B_1A_1C_1$ ($[AL]$ и $[A_1L_1]$ биссектрисы треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно).
- Отрезок AM является медианой основания равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$). Найдите длину медианы AM , если периметр треугольника ABC равен $\mathcal{P}$, а периметр треугольника ABM равен $\mathcal{P}_1$.
- Длины сторон a, b, c треугольника относятся как $a:b:c = 3:4:5$. Найдите длины сторон этого треугольника, если его периметр равен 60 см.

§4 Подobie фигур. Подobie треугольников. Теорема Фалеса

Определение

Пусть k – положительное действительное число.

Преобразование подобия с коэффициентом k (или **подобием с коэффициентом k**) **плоскости** называется отображение плоскости на себя, при котором для любых двух точек A, B и соответственно их образов A', B' выполнено условие $A'B' = kAB$.



Из равенства $A'B' = k \cdot AB$ следует, что если $A \neq B$, то $A' \neq B'$.

Теорема 11

1. Композиция двух подобий с коэффициентами k_1 и k_2 является подобием с коэффициентом $k_1 k_2$.
2. Преобразование, обратное подобию с коэффициентом k , является подобием с коэффициентом $\frac{1}{k}$.

Доказательство:

1. Пусть различные точки A и B отображаются при подобии с коэффициентом k_1 в точки A' и B' соответственно, а эти точки, в свою очередь, отображаются при подобии с коэффициентом k_2 в точки A'' и B'' соответственно. Тогда $A'B' = k_1 AB$ и $A''B'' = k_2 A'B'$. Отсюда следует, что $A''B'' = k_1 k_2 AB$, то есть преобразование, отображающее точки A и B в точки A'' и B'' соответственно, является подобием с коэффициентом $k_1 k_2$.

2. При подобии с коэффициентом k для различных точек A и B плоскости и соответственно их образов A' и B' имеет место равенство $A'B' = k \cdot AB$. Отсюда следует, что $AB = \frac{1}{k} \cdot A'B'$, то есть преобразование, отображающее точки A' и B' в точки A и B соответственно, является подобием с коэффициентом $\frac{1}{k}$. ►

Вспомним

Две фигуры называются **подобными**, если существует преобразование подобия плоскости, отображающее одну фигуру на другую.

Конгруэнтность фигур – это частный случай подобия ($k = 1$).

Определение

Треугольники ABC и $A'B'C'$ называются **подобными**, если

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'} = k \quad \text{и} \quad \angle A \equiv \angle A', \angle B \equiv \angle B', \angle C \equiv \angle C'.$$

Обозначаем: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Напомним некоторые теоремы, свойства и признаки подобия треугольников.

Теорема 12

(теорема Фалеса) Прямая, не проходящая ни через одну из вершин треугольника, параллельная одной из его сторон, отсекает на прямых, определяемых остальными двумя его сторонами, пропорциональные отрезки (рис. 4.26).

Теорема 13

(основная теорема подобия)

Пусть ABC – треугольник и B_1 – точка, лежащая на прямой BC , отличная от точки C . Если прямая, параллельная стороне AB , проходит через точку B_1 и пересекает прямую AC в точке A_1 , то $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C$ (рис. 4.26).

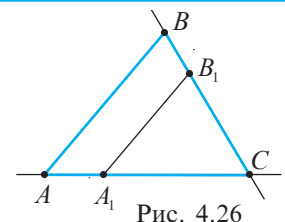


Рис. 4.26

○ Вспомним

Для решения многих геометрических задач применяется метод подобных треугольников, который основан на следующих критериях подобия треугольников:

I признак. Если два угла одного треугольника конгруэнтны двум углам другого треугольника, то треугольники подобны.

II признак. Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника, а углы, образованные этими сторонами, конгруэнтны, то треугольники подобны.

III признак. Если все стороны одного треугольника пропорциональны соответствующим сторонам другого треугольника, то треугольники подобны.

Теорема 14

(свойство биссектрисы внутреннего угла треугольника)

Пусть ABC – треугольник и A' – внутренняя точка стороны BC . Полупрямая $[AA'$ является биссектрисой внутреннего угла BAC этого треугольника тогда и только тогда, когда $\frac{BA'}{A'C} = \frac{AB}{AC}$ (рис. 4.27).

Теорема 15

Если стороны угла XOY пересечены n , $n \in \mathbb{N}^*$, $n > 1$, параллельными прямыми $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_nB_n$, то соответствующие отрезки, отсекаемые этими прямыми на его сторонах, пропорциональны: $\frac{OA_1}{OB_1} = \frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3} = \dots = \frac{A_{n-1}A_n}{B_{n-1}B_n}$ (рис. 4.28).

Теорема 16

Если две параллельные прямые a и b пересечены n , $n \in \mathbb{N}^*$, $n > 2$, прямыми, проходящими через одну и ту же точку O , $O \notin a$, $O \notin b$, то отсекаемые отрезки на этих прямых пропорциональны: $\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3} = \dots = \frac{A_{n-1}A_n}{B_{n-1}B_n}$ (рис. 4.29).

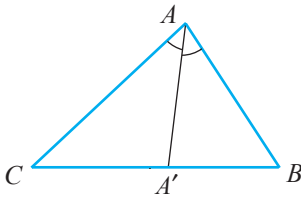


Рис. 4.27

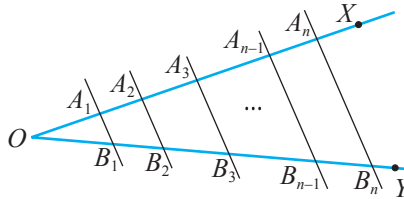


Рис. 4.28

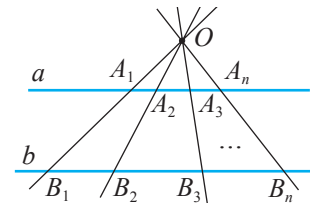


Рис. 4.29



Задание

• Докажите теоремы 14–16.



Задание с решением

В треугольник ABC вписан ромб так, что угол A у них общий, а другая вершина принадлежит стороне BC треугольника. Найдём длину стороны ромба, если $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ (рис. 4.30).

Решение:

Пусть $AMLN$ – ромб, удовлетворяющий условиям задачи. Тогда диагональ AL этого ромба является биссектрисой угла A треугольника ABC . Так как треугольники MBL и ABC подобны, то

$$AC : ML = BC : BL = (BL + LC) : BL = 1 + LC : BL. \quad (1)$$

Из свойства биссектрисы внутреннего угла треугольника следует, что

$$LC : BL = AC : AB = b : c. \quad (2)$$

Из равенств (1) и (2) получаем: $\frac{b}{ML} = 1 + \frac{b}{c} \Rightarrow ML = \frac{bc}{b+c}$.

Ответ: Длина стороны ромба равна $\frac{bc}{b+c}$.

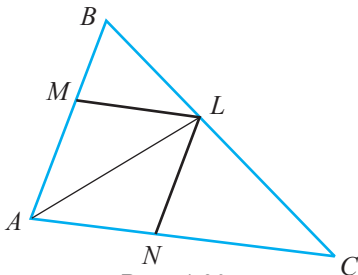


Рис. 4.30

Задачи



Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт

А

- Длины двух сторон равнобедренного треугольника равны 18 см и 6 см, а длина боковой стороны другого равнобедренного треугольника равна 6 см. Найдите длину основания второго треугольника, если известно, что угол при основании первого треугольника конгруэнтен углу при основании второго треугольника.
- Найдите периметры подобных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, если известно, что $AB = 12$ см, $A_1B_1 = 3$ см, $AC = 16$ см, $B_1C_1 = 2$ см.

В

- Основание высоты CD прямоугольного треугольника ABC ($m(\angle C) = 90^\circ$) делит его гипотенузу на отрезки $AD = 18$ см и $BD = 32$ см. Найдите длины сторон треугольника ABC .
-  **Работайте в парах!** В треугольник ABC , у которого высота $AD = 10$ см и сторона $BC = 15$ см, вписан квадрат так, что две его вершины принадлежат стороне BC , а две другие – сторонам AB и AC . Найдите длину стороны квадрата.

С

- Несущие прямые боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке E . Найдите длины сторон треугольника AED , если $AB = 10$ см, $BC = 20$ см, $CD = 12$ см, $AD = 30$ см.
-  **Работайте в парах!** Длины теней двух деревьев равны 10,8 м и 1,8 м. Высота второго дерева равна 1,2 м. Найдите высоту первого дерева.
-  **Работайте в группах!** ○ **Практическая работа на местности:** Применение подобия треугольников в повседневной деятельности.

Реальный профиль

А₁

- Углы A и A_1 равнобедренных треугольников ABC ($[AB] \equiv [AC]$) и $A_1B_1C_1$ ($[A_1B_1] \equiv [A_1C_1]$) конгруэнтны. Докажите, что $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.
- Дан прямоугольный треугольник ABC , у которого $m(\angle C) = 90^\circ$ и $[CD]$ – высота. Докажите, что:
а) $\triangle ABC \sim \triangle ACD$; б) $\triangle ABC \sim \triangle CBD$; в) $\triangle ACD \sim \triangle CBD$.
- Пусть $[AM]$ и $[A_1M_1]$ – медианы подобных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно. Докажите, что $A_1M_1 : AM = A_1B_1 : AB$.
- Пусть треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны, а $[AL]$ и $[A_1L_1]$ – соответствующие биссектрисы. Докажите, что $A_1L_1 : AL = A_1B_1 : AB$.
- Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Докажите, что $AE \cdot BE = CE \cdot DE$ тогда и только тогда, когда $BC \parallel AD$.

В₁

- Докажите, что если H – точка пересечения несущих прямых высот AA_1 , BB_1 , CC_1 произвольного треугольника ABC , то $AH \cdot HA_1 = BH \cdot HB_1 = CH \cdot HC_1$.
-  **Работайте в парах!** Докажите, что в любой трапеции коллинеарны: точка пересечения диагоналей, середины оснований и точка пересечения несущих прямых боковых сторон.
- Дан треугольник ABC ($AB < BC$), у которого $[BL]$ и $[BM]$ – соответственно биссектриса и медиана, проведенные из вершины B . Докажите, что $BL < BM$.
- Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке M так, что $AM \cdot CM = BM \cdot MD$. Докажите, что $\angle ADB \equiv \angle ACB$.

C₁

10. Длины сторон треугольника относятся как 2:4:5. Найдите длины сторон треугольника, подобного заданному, если его периметр равен 66 см.
11. Даны подобные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, причем $AB = 32$ см, $BC = 40$ см, $A_1B_1 = 24$ см, $AC - A_1C_1 = 12$ см. Найдите длины остальных сторон треугольников.
12. Даны треугольник ABC , точки $M \in AB$, $N \in BC$ и $MN \parallel AC$. Найдите длину отрезка AM , если $AB = 32$ см, $AC = 40$ см и $MN = 30$ см.
13.  **Работайте в парах!** Несущие прямые боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O . Найдите высоту треугольника AOD , проведенную из вершины O , если $BC = 14$ см, $AD = 42$ см и высота трапеции равна 6 см.
14.  **Работайте в группах!** ○ **Практическая работа на местности:** Применение подобия треугольников в повседневной деятельности.

§5 Замечательные линии и точки треугольника

○ Вспомним

Отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника, называется **средней линией** треугольника.

Теорема 17

Если $[MN]$ – средняя линия треугольника ABC (M – середина стороны AB , N – середина стороны BC), то $[MN] \parallel [AC]$ и $2MN = AC$ (рис. 4.31).

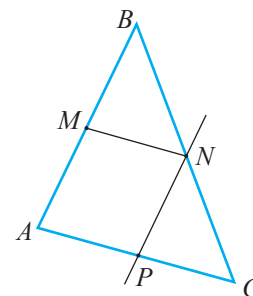


Рис. 4.31

Доказательство:

Пусть точка M – середина стороны AB (рис. 4.31). Через нее проводим прямую, параллельную AC . По теореме 13 эта прямая делит сторону BC пополам, то есть она проходит через точку N . В результате получаем $[MN] \parallel [AC]$. Если через точку N проведем прямую, параллельную стороне AB , то она пересечет сторону AC в точке P , которая является ее серединой. Значит, $AC = AP + PC = 2AP$. Четырехугольник $AMNP$ является параллелограммом, следовательно, $MN = AP$ как противоположные стороны параллелограмма.

Из последних двух равенств следует, что $2MN = AC$. ►

○ Вспомним

Отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной ему стороны, называется **медианой** треугольника.

Теорема 18

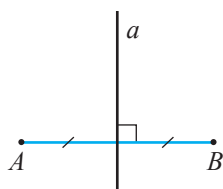
Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую из медиан в отношении 1:2, считая от стороны к вершине.



Задание

- Докажите теорему 18.

○ Запомните!



Точка пересечения медиан треугольника называется **центром тяжести** треугольника.

Медиатрисой, или **серединным перпендикуляром**, отрезка называется прямая, проходящая через середину данного отрезка и перпендикулярная ему.

Используя свойство медиатрисы (точки медиатрисы отрезка равноудалены от его концов), можно доказать, что медиатрисы сторон треугольника пересекаются в одной точке, равноудаленной от его вершин. Эта точка является **центром окружности**, описанной около треугольника. Следовательно, около каждого треугольника можно описать окружность.

○ Вспомним

Отрезок, определяемый вершиной треугольника и ее проекцией на несущую прямую противоположающей стороны, называется **высотой** треугольника.

**Теорема 19**

Несущие прямые высот треугольника пересекаются в одной точке.

**Задание**

- Докажите теорему 19.

О Запомните!

Точка пересечения несущих прямых высот треугольника называется **ортоцентром треугольника**.

Треугольник называется **вписанным в окружность**, если все его вершины принадлежат окружности. Говорят также, что окружность **описана около треугольника**. Треугольник называется **описанным около окружности**, если все его стороны касаются окружности. Говорят также, что окружность **вписана в треугольник**.

Отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину этого угла с точкой пересечения биссектрисы и противоположной стороны, называется **биссектрисой треугольника**.

**Теорема 20**

Биссектрисы внутренних углов треугольника пересекаются в центре окружности, вписанной в треугольник.

О Вспомним

Медиатрисы, медианы, биссектрисы и высоты треугольника называются **замечательными линиями треугольника**.

Центр окружности, вписанной в треугольник, центр окружности, описанной около треугольника, центр тяжести треугольника и ортоцентр треугольника называются **замечательными точками треугольника**.

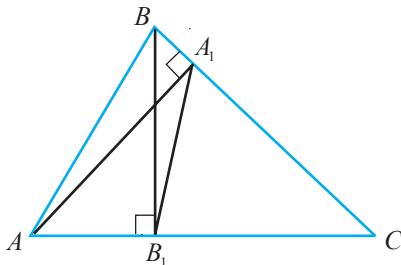
**Задание с решением**

Рис. 4.32

В треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1 (рис. 4.32). Найдем величины углов треугольника A_1B_1C , если $m(\angle A) = \alpha$, $m(\angle B) = \beta$, $\alpha + \beta \neq 90^\circ$.

Решение:

Прямоугольные треугольники BB_1C и AA_1C имеют конгруэнтные острые углы при вершине C , следовательно, они подобны, откуда $\frac{BC}{B_1C} = \frac{AC}{A_1C}$.

Так как треугольники ABC и A_1B_1C имеют конгруэнтные углы при общей вершине C и соответственные стороны этих треугольников пропорциональны, то по второму признаку подобия эти треугольники подобны.

Следовательно, $m(\angle CA_1B_1) = m(\angle CAB) = \alpha$, $m(\angle CB_1A_1) = m(\angle CBA) = \beta$.

Из этой задачи следует, что: *если основания двух высот треугольника не совпадают, то они определяют с третьей вершиной треугольник, подобный данному.*

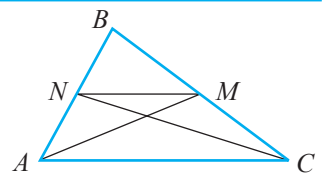
Задачи

Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт

A

- (Всероссийский конкурс 2016) Дан треугольник ABC , у которого $AC = 8$ см, а $[AM]$ и $[CN]$ – медианы (см. рисунок). Впишите в рамку длину отрезка MN .

$$MN = \boxed{} \text{ см.}$$



- Стороны треугольника равны 12 см, 6 см и 8 см. Найдите периметр треугольника, вершинами которого являются середины сторон данного треугольника.
- В равнобедренном треугольнике длина основания равна $4\sqrt{2}$ см, а боковые стороны образуют угол в 120° . Найдите высоты треугольника.

В

4. Медианы катетов прямоугольного треугольника равны $\sqrt{52}$ см и $\sqrt{73}$ см. Найдите длину гипотенузы.
5. Длины двух сторон треугольника равны 10 см и 16 см, а угол, образованный ими, равен 120° . Найдите высоты, проведенные к данным сторонам треугольника.
6. Точка на гипотенузе, равноудаленная от обоих катетов, делит гипотенузу на отрезки длиной 30 см и 40 см. Найдите длины катетов.
7.  **Работайте в парах!** Две медианы треугольника перпендикулярны. Найдите длины сторон треугольника, если длины этих медиан равны 4,5 см и 6 см.

С

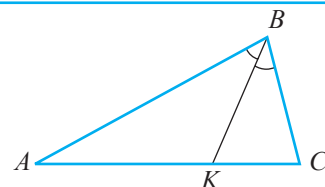
8. Медиана, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, конгруэнтна одному из катетов и равна 5 см. Найдите длины сторон треугольника.
9.  **Работайте в парах!** Найдите длины биссектрис острых углов прямоугольного треугольника, если его катеты равны 3 см и 4 см.
10. Длина одной из сторон треугольника равна 36 см. Через точку пересечения медиан треугольника проведена прямая, параллельная данной стороне. Найдите длину отрезка этой прямой, отсекаемого сторонами треугольника.

Реальный профиль

A₁

1. ( 2019) Биссектриса BK треугольника ABC делит сторону AC на отрезки $AK = 4$ см и $KC = 2$ см (см. рисунок). Впишите в рамку длину стороны AB , если $BC = 3$ см.

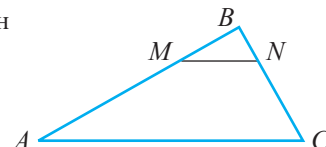
$$AB = \boxed{} \text{ см.}$$



2. Медиана и высота, проведенные из одной вершины треугольника, делят этот угол на три конгруэнтных угла. Найдите величины углов треугольника.
3.  **Работайте в парах!** Длины катетов прямоугольного треугольника равны 9 см и 12 см. Найдите расстояние между точками пересечения биссектрис и медиан этого треугольника.

B₁

4. Длины двух сторон треугольника равны 6 см и 8 см, а медианы этих сторон перпендикулярны. Найдите длину третьей стороны треугольника.
5. ( 2023) Дан треугольник ABC , в котором $MN \parallel AC$, $M \in (AB)$, $N \in (BC)$. Найдите длину отрезка BN , если $MN = 4$ см, $NC = 5$ см, $AC = 14$ см.



6. Расстояния от центра окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, до вершин его острых углов равны $\sqrt{5}$ см и $\sqrt{10}$ см. Найдите длины сторон треугольника и радиус вписанной окружности.
7.  **Работайте в парах!** Длины сторон треугольника равны 5 см, 6 см и 7 см. Центр окружности, вписанной в этот треугольник, делит биссектрису большего угла на два отрезка. Найдите отношение длин полученных отрезков.
8. Найдите длины биссектрис острых углов прямоугольного треугольника, если его катеты равны 18 см и 24 см.

C₁

9. В окружность радиуса R вписан равнобедренный треугольник, у которого сумма длины основания и высоты равна диаметру окружности. Найдите высоту треугольника, проведенную к его основанию.
10. Пусть $[AA_1]$ и $[BB_1]$ – высоты треугольника ABC . Найдите длину стороны BC , если $AC = 6$ см, $B_1C = 4$ см, $A_1C = 3$ см.

§6 Метрические соотношения в треугольнике

6.1. Метрические соотношения в прямоугольном треугольнике

Вспомним

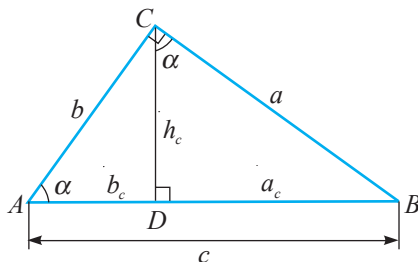


Рис. 4.33



Задание

Рассмотрим треугольник ABC с прямым углом в вершине C , высотой CD и общепринятыми обозначениями (рис. 4.33).

Из треугольников ACB , CDB , ADC находим:

$$\frac{a}{c} = \sin \alpha \quad (1), \quad \frac{b}{c} = \cos \alpha \quad (2),$$

$$\frac{a_c}{a} = \sin \alpha \quad (3), \quad \frac{a_c}{h_c} = \operatorname{tg} \alpha \quad (4),$$

$$\frac{b_c}{b} = \cos \alpha \quad (5), \quad \frac{h_c}{b_c} = \operatorname{tg} \alpha \quad (6).$$

• Сформулируйте вербально отношения (1)–(6).

Сравнивая равенства (1) и (3), (2) и (5), (4) и (6), получаем:

$$\frac{a}{c} = \frac{a_c}{a}, \text{ то есть } a^2 = c \cdot a_c \quad (7); \quad \frac{b}{c} = \frac{b_c}{b}, \text{ то есть } b^2 = c \cdot b_c \quad (8);$$

$$\frac{a_c}{h_c} = \frac{h_c}{b_c}, \text{ то есть } h_c^2 = a_c \cdot b_c.$$

Складывая почленно равенства (7) и (8), получаем: $a^2 + b^2 = c(a_c + b_c)$.

Так как $a_c + b_c = c$, то $a^2 + b^2 = c^2$.

Таким образом, мы доказали следующие три теоремы:

Теорема 21

Теорема катета

В прямоугольном треугольнике квадрат длины катета равен произведению длины гипотенузы на длину проекции этого катета на гипотенузу.

На рисунке 4.34, $AC^2 = BC \cdot CD$, $AB^2 = BC \cdot BD$.

Теорема 22

Теорема высоты

В прямоугольном треугольнике квадрат высоты, опущенной из вершины прямого угла на гипотенузу, равен произведению длин проекций катетов на гипотенузу.

На рисунке 4.34, $AD^2 = CD \cdot BD$.

Теорема 23

Теорема Пифагора

В прямоугольном треугольнике квадрат длины гипотенузы равен сумме квадратов длин его катетов.

На рисунке 4.34, $BC^2 = AC^2 + AB^2$.

Задания с решением

1. Внутри угла O в 60° расположена точка M , отстоящая на расстояниях 2 см и 11 см от сторон угла. Вычислим расстояние от точки M до вершины угла (рис. 4.35).

Решение:

Имеем: $MA = 11$ см, $MB = 2$ см. Пусть прямая AM пересекает сторону OB угла AOB в точке C . Так как в прямоугольном треугольнике MBC $m(\angle C) = 30^\circ$, то $CM = 4$ см.

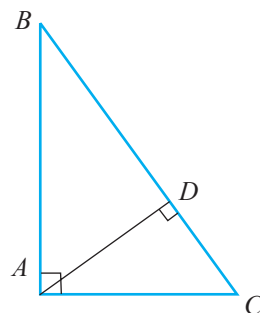


Рис. 4.34

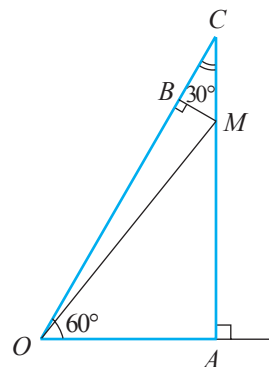


Рис. 4.35

Из прямоугольного треугольника OAC получаем:

$$OA = AC \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{15}{\sqrt{3}} \text{ (см)}.$$

По теореме Пифагора из прямоугольного треугольника OAM имеем:

$$OM = \sqrt{OA^2 + AM^2} = \sqrt{75 + 121} = 14 \text{ (см)}.$$

Ответ: $OM = 14$ см.

2. Выразим радиус r окружности, вписанной в прямоугольный треугольник ABC , через катеты a , b и гипотенузу c (рис. 4.36).

Решение:

Пусть O – центр окружности, вписанной в треугольник ABC , и E, F, G – точки касания. Так как четырехугольник $EOGC$ – квадрат со стороной r , то $GB = a - r = FB$, $AE = b - r = AF$ – отрезки, соединяющие точку (вне окружности) с точками касания соответствующих несущих прямых, конгруэнтны. Но $AF + FB = AB = c$.

$$\text{Отсюда } c = a - r + b - r \Rightarrow r = \frac{a + b - c}{2}.$$

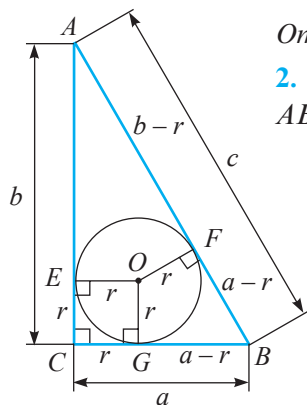


Рис. 4.36

Задачи



Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт

А

- Длины катетов прямоугольного треугольника равны 9 см и 12 см. Найдите радиусы окружностей, вписанной в треугольник и описанной около него.
- (ЕАК 2018) Радиус окружности, вписанной в равносторонний треугольник, равен $\sqrt{3}$ см. Найдите периметр треугольника.

В

-  **Работайте в парах!** Медиана, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, конгруэнтна одному из катетов. Найдите величины острых углов треугольника.
- Основание высоты, проведенной из вершины прямого угла, делит гипотенузу прямоугольного треугольника на отрезки длиной 4 см и 9 см. Найдите длины катетов.
- Внутри угла в 60° расположена точка M , отстоящая на расстоянии $\sqrt{7}$ см и $2\sqrt{7}$ см от сторон угла. Найдите расстояние от точки M до вершины угла.

С

- Длины катетов прямоугольного треугольника равны 8 см и 12 см. Найдите длину биссектрисы прямого угла.
-  **Работайте в парах!** Точка касания окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, делит гипотенузу на отрезки длиной 5 см и 12 см. Найдите длины катетов треугольника.
- Точка касания окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, делит один из катетов на отрезки длиной 3 см и 9 см. Найдите длины гипотенузы и другого катета.

Реальный профиль

А₁

- Длины катетов прямоугольного треугольника равны 6 см и 8 см. Найдите :
а) радиус описанной окружности треугольника; б) радиус окружности, вписанной в этот треугольник.
- Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен 15 см, а радиус окружности, вписанной в него, равен 6 см. Найдите длины сторон треугольника.

3. Даны прямоугольный треугольник ABC и $[CD]$ – биссектриса его прямого угла. Известно, что $AD = m$ и $BD = n$. Найдите высоту, проведенную из вершины C .
4. Прямоугольный треугольник ABC разделен высотой CD , проведенной к гипотенузе, на два треугольника, ADC и BDC . Радиусы окружностей, вписанных в эти треугольники, равны r_1 и r_2 . Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC .

В₁

5.  **Работайте в парах!** Диаметр полуокружности, касающейся катетов прямоугольного треугольника, расположен на гипотенузе, а ее центр делит гипотенузу на отрезки длиной 3 см и 4 см. Найдите длины сторон треугольника и радиус полуокружности.
6. Биссектриса острого угла прямоугольного треугольника делит противолежащий катет на отрезки длиной 4 см и 5 см. Найдите длины сторон треугольника.

С₁

7.  **Работайте в парах!** Докажите, что если величина одного из острых углов прямоугольного треугольника равна 15° , то высота, проведенная к гипотенузе, в 4 раза меньше длины гипотенузы. (Указание. Постройте медиану, проведенную к гипотенузе.)
8. Дан прямоугольный треугольник ABC , у которого $m(\angle A) = 90^\circ$ и $AC = 1$ м. Зная, что E и F – середины отрезков BC и AB соответственно, а прямые AE и CF перпендикулярны, найдите длины сторон треугольника.
9. Основание D высоты CD , проведенной из вершины прямого угла треугольника ABC , удалено от катетов AC и BC на расстояния m и n соответственно. Найдите длины катетов треугольника.

6.2. Метрические соотношения в произвольном треугольнике

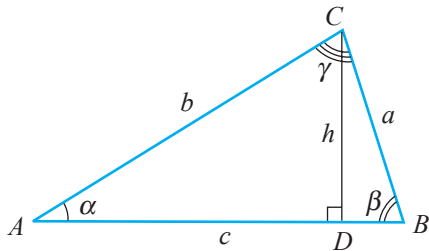


Рис. 4.37

Рассмотрим остроугольный треугольник ABC с общепринятыми обозначениями, у которого $CD = h$ – высота, проведенная из вершины C (рис. 4.37).

Из треугольников ADC и BDC имеем $\frac{h}{b} = \sin \alpha$ и $\frac{h}{a} = \sin \beta$ соответственно. Отсюда $h = b \sin \alpha$ и $h = a \sin \beta$. Значит, $b \sin \alpha = a \sin \beta$, то есть $\frac{b}{\sin \beta} = \frac{a}{\sin \alpha}$.

Аналогично, построив высоты из вершин A и B , получим, что $\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$ и

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma}. \text{ Сопоставив эти результаты, получим: } \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

В случае тупоугольного треугольника ABC , аналогично рассуждая, можно получить тот же результат.



Задание

• Проведите эти рассуждения.

Таким образом, доказана

Теорема 24

Теорема синусов

Длины сторон произвольного треугольника ABC пропорциональны синусам противолежащих углов:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} \text{ (рис. 4.38).}$$

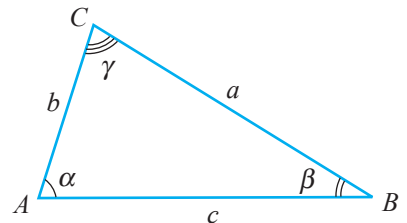


Рис. 4.38

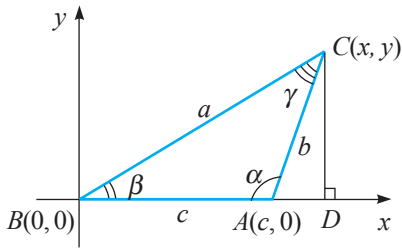


Рис. 4.39

Пусть ABC – произвольный треугольник с общепринятыми обозначениями, у которого $CD = h$ – высота, проведенная из вершины C (рис. 4.39).

Рассмотрим прямоугольную систему координат с началом в точке B , причем положительная полуось Ox совпадает с полуосью $[BA$. Пусть вершины C , B и A имеют координаты (x, y) , $(0, 0)$ и $(c, 0)$ соответственно.

Из треугольника ACD получаем: $AD = b \cos(180^\circ - \alpha) = -b \cos \alpha$,

$$CD = b \sin(180^\circ - \alpha) = b \sin \alpha.$$

Следовательно, $x = BA + AD = c - b \cos \alpha$, $y = b \sin \alpha$. По формуле расстояния между двумя точками имеем:

$$\begin{aligned} a^2 = BC^2 &= (c - b \cos \alpha)^2 + (b \sin \alpha)^2 = c^2 - 2bc \cos \alpha + b^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha = \\ &= c^2 + b^2 - 2bc \cos \alpha. \end{aligned}$$

Из треугольника CDB получаем $x = BD = a \cos \beta$, $y = CD = a \sin \beta$ и $b^2 = AC^2 = (a \cos \beta - c)^2 + (a \sin \beta)^2 = a^2 \cos^2 \beta - 2ac \cos \beta + c^2 + a^2 \sin^2 \beta = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$.

Аналогично рассматривая систему координат с началом в точке C , получим равенство $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$.

Таким образом, доказана

Теорема 25

Теорема косинусов

В произвольном треугольнике ABC квадрат длины любой стороны равен сумме квадратов длин двух других сторон минус удвоенное произведение длин этих двух сторон на косинус угла между ними:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\angle A);$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos(\angle B);$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\angle C) \text{ (рис. 4.40).}$$

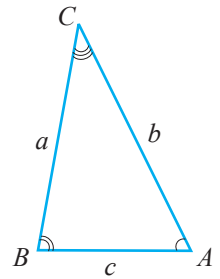


Рис. 4.40

Из этой теоремы следует, что:

- а) если $a^2 > b^2 + c^2$, то угол, противолежащий стороне a , тупой;
- б) если $a^2 < b^2 + c^2$, то угол, противолежащий стороне a , острый;
- в) если $a^2 = b^2 + c^2$, то угол, противолежащий стороне a , прямой.

Замечаем, что при $\alpha > 90^\circ$ (рис. 4.39) проекцией стороны AC на несущую прямую стороны AB является $AD = -b \cos \alpha$, и тогда $a^2 = b^2 + c^2 + 2c \cdot AD$ (11).

При $\beta < 90^\circ$ проекцией стороны BC на несущую прямую стороны AB является $BD = a \cos \beta$, и тогда $b^2 = a^2 + c^2 - 2c \cdot BD$ (12).

В формулах (11), (12) выражена

Теорема 26

Обобщенная теорема Пифагора

Квадрат длины стороны произвольного треугольника равен сумме квадратов длин двух других сторон плюс/минус удвоенное произведение длины одной из этих двух сторон на длину проекции другой стороны на несущую прямую первой стороны.



Задания с решением

1. Докажем, что в условии теоремы синусов

$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$, где R – радиус окружности, описанной около треугольника ABC (рис. 4.41).

Решение:

Достаточно доказать, что одно из этих трех отношений равно $2R$.

Пусть, например, угол A – острый. Проведем диаметр BD окружности, описанной около треугольника ABC .

В этом случае углы BDC и BAC имеют одинаковую величину α . Из прямоугольного треугольника BCD следует, что $\frac{BC}{\sin \alpha} = BD$, то есть $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$, ч. т. д.

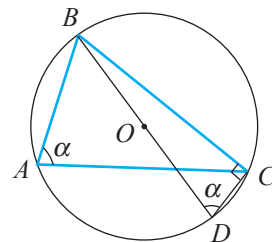


Рис. 4.41

○ Запомните!

$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$, где R – радиус описанной окружности треугольника.

2. Докажем, что сумма квадратов длин диагоналей любого параллелограмма равна сумме квадратов длин его сторон.

Решение:

Пусть $ABCD$ – параллелограмм, у которого $m(\angle A) = \alpha$ (рис. 4.42). Тогда $m(\angle B) = 180^\circ - \alpha$. Применим теорему косинусов к треугольникам ABD и ABC :

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos \alpha,$$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos(180^\circ - \alpha).$$

Складывая почленно эти равенства (учитывая, что $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$), получим

$$BD^2 + AC^2 = AB^2 + AD^2 + AB^2 + BC^2, \text{ то есть}$$

$$BD^2 + AC^2 = 2(AB^2 + AD^2), \text{ ч. т. д.}$$

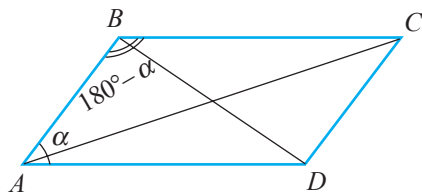


Рис. 4.42

3 замечание

Значения синуса, косинуса, тангенса, котангенса для некоторых часто используемых углов представлены в таблице 1, раздел 1.2, Модуль 8.

Задачи



Реальный профиль

А₁

1. Стороны параллелограмма равны $\sqrt{3}$ см и $\sqrt{7}$ см, а одна из его диагоналей равна 2 см. Найдите другую диагональ.
2. В окружность радиуса 10 см вписан треугольник, один угол которого равен 60° , а другой – 15° . Найдите площадь треугольника.
3. Две стороны треугольника равны 2 м и 3 м, а синус угла между ними равен $\frac{\sqrt{15}}{4}$. Найдите длину третьей стороны.
4.  **Работайте в паре!** Расстояние от центра окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, до вершин его острых углов равно $\sqrt{5}$ см и $\sqrt{10}$ см. Найдите длину гипотенузы треугольника.

B₁

- Длины сторон треугольника равны 4 м, 5 м и 6 м. Найдите длины проекций меньших сторон на большую сторону.
- Одна из сторон треугольника равна 3 см, один из углов, прилежащих к этой стороне, равен 120° , а сторона, противолежащая этому углу, равна 7 см. Найдите длину третьей стороны.
-  **Работайте в парах!** Дан треугольник ABC , у которого $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Найдите длину медианы, проведенной к стороне, противолежащей вершине C .

C₁

- Высота и медиана, проведенные из одной вершины треугольника, делят угол при этой вершине на три конгруэнтных угла. Найдите длины сторон треугольника, если длина медианы 5 см.
- Окружность проходит через вершину квадрата со стороной a , середину одной из сторон, не проходящих через эту вершину, и через центр квадрата. Найдите радиус окружности.

Задачи на повторение

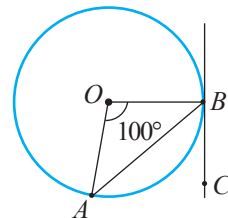


Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт

A

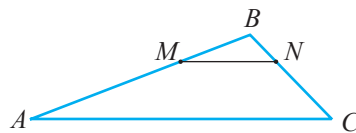
- Длина одного из катетов прямоугольного треугольника равна 112 см, а гипотенузы – 113 см. Найдите площадь треугольника.
- Биссектриса одного из острых углов прямоугольного треугольника делит противолежащий катет на отрезки длиной 4 см и 5 см. Найдите длины сторон треугольника.
- Длина боковой стороны равнобедренного треугольника равна 4 см, а длина медианы, проведенной к этой стороне, равна 3 см. Найдите длину основания треугольника.
-  (2016) На рисунке точки A и B принадлежат окружности с центром O так, что $m(\angle AOB) = 100^\circ$, а прямая BC – касательная к окружности. Впишите в рамку величину угла ABC (в градусах).

$$m(\angle ABC) = \boxed{}.$$



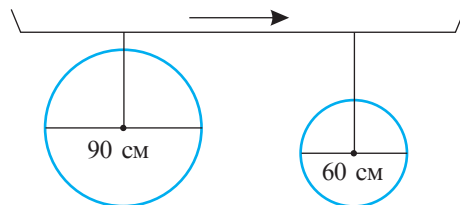
-  (2018) На рисунке изображен треугольник ABC , в котором $MN \parallel AC$, $M \in (AB)$, $N \in (BC)$, $BN = 1$ см, $NC = 2$ см, $AM = 4$ см. Впишите в рамку длину отрезка AB .

$$AB = \boxed{} \text{ см.}$$



B

- На фотографии, сделанной с самолета, видно, что кукурузное поле имеет форму прямоугольника с размерами 4×3 см. Зная, что коэффициент подобия между фотографией и планом составляет 1:10000, найдите фактические размеры кукурузного поля.
- В прямоугольном треугольнике ABC , $BC = 8$ см, $AB = 10$ см. На продолжении катета AC взята точка D так, что точка C лежит между A и D . Найдите длину DB , если $DB = DA$.
-  (2013) Диаметры переднего и заднего колеса телеги равны соответственно 60 см и 90 см. Какое расстояние (в метрах) проехала телега, если известно, что переднее колесо сделало на 100 оборотов больше, чем заднее колесо. (При вычислении примите $\pi \approx 3$.)



9. Дан треугольник ABC , в котором $BC = (\sqrt{6} + \sqrt{2})$ см, $m(\angle ABC) = 45^\circ$, $m(\angle ACB) = 30^\circ$. Найдите периметр треугольника ABC .
10. В окружности построены пересекающиеся хорды AB и CD . Величины углов ABC и ACD равны 50° и 40° соответственно. Найдите градусную меру угла DAC .

С

11. Две окружности, радиусы которых равны 7 см, касаются внешне. Прямая пересекает окружности в точках A, B, C и D так, что $AB = BC = CD$. Найдите AB .
12.  **Работайте в парах!** Из точки A , расположенной вне окружности радиуса 8 см, проведена секущая длиной 10 см, которая разделена окружностью на два конгруэнтных отрезка. Найдите расстояние от точки A до центра окружности.

Реальный профиль

А₁

1. Высота, опущенная на основание равнобедренного треугольника, равна 20 см, а высота, опущенная на боковую сторону, равна 24 см. Найдите длины сторон треугольника.
2.  **Работайте в парах!** В треугольник со сторонами 12 см, 15 см и 18 см вписана полуокружность так, что она касается меньших сторон треугольника, а большая сторона содержит диаметр полуокружности. Найдите длины отрезков, на которые центр полуокружности делит большую сторону треугольника.

В₁

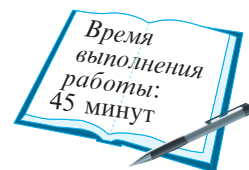
3. Длина радиуса вписанной в равнобедренный треугольник окружности равна 1,5 см, а длина радиуса описанной около этого треугольника окружности — $\frac{25}{8}$ см. Найдите длины сторон, если они выражаются целыми числами.
4.  **Работайте в парах!** В цехе по резке листового металла остаются отходы в форме равностороннего треугольника со стороной 240 мм. Для нового изделия, внедряемого в производство, будут изготавливаться детали квадратной формы со стороной 80 мм и детали прямоугольной формы с размерами 190×220 мм. Какие из этих деталей могут быть изготовлены из отходов?
5. Высота, проведенная из вершины угла при основании равнобедренного треугольника, в два раза меньше боковой стороны. Найдите величины углов этого треугольника (рассмотрите оба случая).
6.  **Работайте в парах!** Две окружности радиусами r и R касаются внешне. Прямая пересекает эти окружности так, что образовались три конгруэнтных отрезка. Найдите длины этих отрезков.
7. Окружность длиной 12π см разделена точками A, B, C на три дуги, длины которых относятся как 1:2:3. Найдите площадь треугольника ABC .

С₁

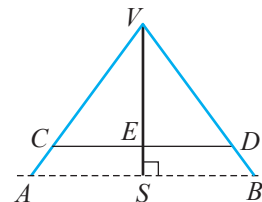
- 8*. Окружность, вписанная в треугольник ABC , делит медиану BB_1 ($B_1 \in AC$) на три конгруэнтных отрезка. Найдите отношение длин сторон треугольника ABC .
9. Какова длина пути, пройденного концом часовой стрелки длиной 18 мм за:
а) 1 час; б) 12 часов; в) 24 часа? ($\pi \approx 3,14$.)
10.  **Работайте в парах!** Какова длина пути, пройденного концом минутной стрелки длиной 30 см за:
а) 1 час; б) 12 часов; в) 24 часа? ($\pi \approx 3,14$.)
11. Велосипедист тренируется на треке круговой формы радиусом 240 м. Скорость велосипедиста 300 м в минуту. За какое время велосипедист проходит один круг? ($\pi \approx 3,14$.)
12. Ширина автомобиля равна 1,2 м. Он проходит трассу круговой формы, внутренний радиус которой составляет 100 м, сохраняя постоянно расстояние в 50 см от внутреннего края трассы. Найдите разность путей внешних и внутренних колес автомобиля при прохождении одного круга. ($\pi \approx 3,14$.)

Итоговый тест

Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт

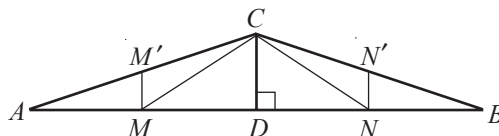


- Длина гипотенузы прямоугольного треугольника ABC равна 9 см, а один из его катетов имеет длину 6 см. Из вершины C прямого угла проведены медиана CM и высота CD . Найдите MD .
- Двойная лестница имеет длину плеча $[VA]$, равную 5 м. Для крепления используется трос $[CD]$, прикрепленный к лестнице на высоте 1 м от земли ($[AC]$).
 - Определите истинностное значение высказывания: „ $\triangle VCD \sim \triangle VSB$ ”.
 - Найдите длину троса, если высота лестницы ($[VS]$) равна 4 м.
- Из трубы радиусом 125 мм выходят три трубы одинакового диаметра. Найдите диаметр этих трех труб, чтобы они могли пропустить весь поток.
- Дан прямоугольный треугольник ABC , в котором $m(\angle A) = 90^\circ$ и $[BD]$ – биссектриса угла B ($D \in AC$). Зная, что $CD = 5$ см, $AD = 4$ см, найдите длины сторон треугольника.

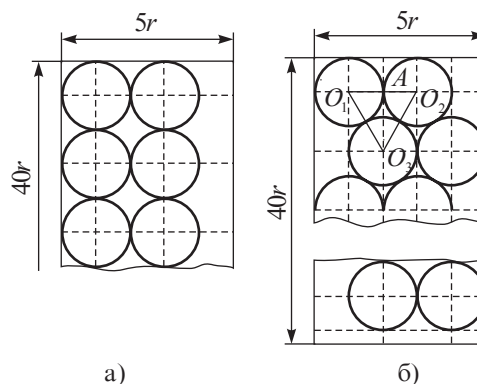


Реальный профиль

- Треугольная крыша имеет проем $AB = d$, а ее уклон равен $\frac{CD}{DB} = \frac{1}{3}$.
 - Найдите истинностное значение высказывания: „ $\triangle ACB \sim \triangle MCN$ ”.
 - Определите длину балки CN , если $DN = NB$.



- Рассчитайте, сколько дисков радиуса r можно изготовить путем нерационального и рационального разрезания металлической ленты шириной $5r$ и длиной $40r$ (на рисунке показано нерациональное (а) и рациональное (б) разрезание).



- Сторона равностороннего треугольника ABC равна a . Рассмотрим окружность, диаметр которой равен высоте CD . Через точки A и C проведем касательные к этой окружности, которые пересекутся в точке E . Найдите периметр треугольника ACE .
- Докажите, что для любого треугольника со сторонами a , b и c справедливо соотношение:

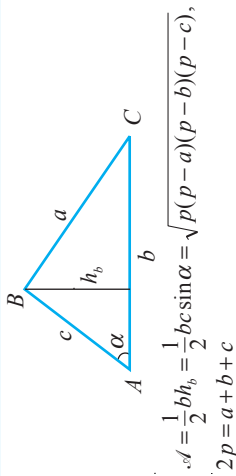
$$\frac{\operatorname{tg}(\angle A)}{\operatorname{tg}(\angle B)} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{b^2 + c^2 - a^2}.$$

Плоские фигуры

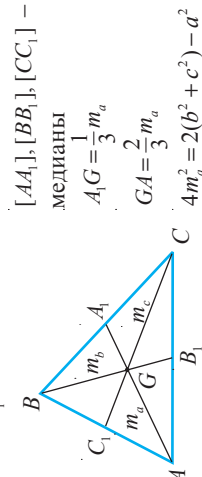
Система аксиом

1. Аксиомы инцидентности (принадлежности) (И)
2. Аксиомы порядка (П)
3. Аксиомы измерения (М) и откладывания отрезков и углов (О)
4. Аксиома существования треугольника, конгруэнтного данному треугольнику (ПТ)
5. Аксиома параллельности (ПП)

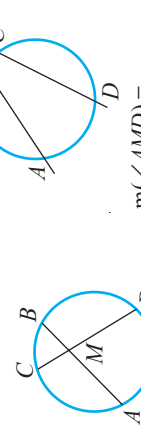
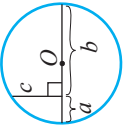
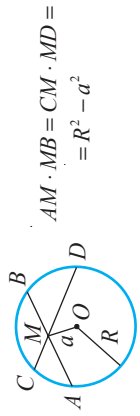
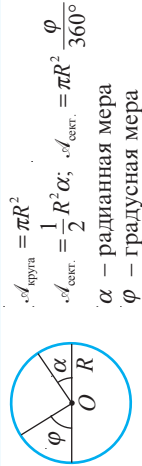
Треугольники



Прямоугольный треугольник



Окружность



Метрические отношения в произвольном треугольнике

Теорема синусов

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R, \text{ где } R - \text{ радиус окружности, описанной треугольнику } ABC.$$

Теорема косинусов

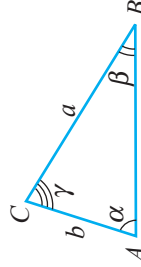
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Обобщенная теорема Пифагора

Квадрат длины стороны произвольного треугольника равен сумме квадратов длин двух других сторон плюс/минус удвоенное произведение длины одной из этих двух сторон на длину проекции другой стороны на несущую прямую первой стороны.



модуль 5

Одночлены. Многочлены. Алгебраические дроби

То, что мы знаем, слишком мало.

То, чего мы не знаем, огромно.

Лаплас

Цели

- *распознавание и применение одночленов, многочленов, алгебраических дробей в различных контекстах;
- *выполнение операций сложения, вычитания, умножения и деления одночленов, многочленов, алгебраических дробей;
- *разложение многочленов на множители;
- *нахождение корней многочленов от одной переменной.

§1 Одночлены. Операции над одночленами

1.1. Понятие одночлена

Среди разнообразных алгебраических выражений, например $8Y$, $-3x^2 + y$, $2\sqrt{ab^2}$, $\sqrt{7ab}$, $X^5Y^2Z^3$, 2023, $2 + \sqrt{3}xy$, $(2 + \sqrt{3})XY$, выделяют:

- выражения, в которых над буквами выполняются операции сложения, вычитания, умножения и возведения в степень с натуральным показателем: $-3x^2 + y$, $\sqrt{7ab}$, 2023, $2 + \sqrt{3}xy$;
- выражения, содержащие буквы под корнем: $2\sqrt{ab^2}$;
- выражения, представляющие собой произведение множителей, каждый из которых является числовым выражением или буквой с натуральным показателем степени: $8Y$, $X^5Y^2Z^3$, 2023, $(2 + \sqrt{3})XY$.

Выражения, подобные тем, что указаны в пункте а), называются **рациональными** алгебраическими выражениями. Выражения, указанные в пункте б), называются **иррациональными** выражениями. А выражения, указанные в пункте в), называются **одночленами**.

○ Запомните!

Одночлены – это рациональные алгебраические выражения, содержащие только произведения чисел, букв и их степеней с натуральным показателем.

- Одночлен состоит из **коэффициента** (числового множителя) и **буквенной части**.
- Буквы в одночленах называются **переменными**.
- Переменные одночленов обозначаются, как правило, заглавными латинскими буквами (X , Y , Z и т.д.).
- Степень одночлена от одной переменной** равна показателю степени этой переменной.
- Степень одночлена от нескольких переменных** равна сумме показателей степеней всех переменных. Степень многочлена $3X^3Y$ равна 4, а его степень, относительно X , равна 3.

$$3X^3Y$$

$$(2 + \sqrt{3})X$$

$$\sqrt{2}XZ^2$$

1.2. Операции над одночленами

О Запомните!

Одночлены, состоящие из одних и тех же буквенных частей (независимо от порядка записи множителей) называются *подобными одночленами* или *подобными слагаемыми*.

- **Сумма, разность** одночленов M_1, M_2 – это сумма $M_1 + M_2$, соответственно, разность $M_1 - M_2$.
- **Приведение подобных слагаемых** – это операция, при которой сумма подобных одночленов заменяется аналогичным одночленом, коэффициент которого равен сумме коэффициентов подобных слагаемых.

Пример: $2X^2Y - \sqrt{3}X^2Y + 3X^2Y = (5 - \sqrt{3})X^2Y$.

- **Произведением** одночленов является одночлен, коэффициент которого равен произведению коэффициентов множителей, а буквенные множители, представленные степенями с одинаковым основанием, заменяются их произведением.

Пример: $2X^2Y \cdot \sqrt{3}XYZ = 2\sqrt{3}X^3Y^2Z$.

- **Возведение одночлена в степень** с натуральным показателем выполняется согласно свойству возведения в степень произведения $((xy)^n = x^n \cdot y^n)$.

Пример: $(2X^2Y)^3 = 8X^6Y^3$.

Любой ненулевой одночлен в степени 0 – это одночлен 1.

- Одночлен R называется **частным одночленом** P и Q , если $Q \cdot R = P$.

Пример: $6X^3Y^2Z : 5X^2YZ = \frac{6}{5}XY$, так как $\frac{6}{5}XY \cdot 5X^2YZ = 6X^3Y^2Z$.

В общем случае отношение двух одночленов представляет собой алгебраическую дробь.

Деления на нулевой одночлен не существует.

Упражнения и задачи



Реальный профиль

А₁

- Определите, какие из указанных выражений являются одночленами:
а) 2,05, $\sqrt{XY}$, X , $\sqrt{15YZ}$; Z^{2010} , $\frac{XY}{Z}$, $X^2 + Y^2$;
б) $-Y^8$, $3\sqrt{2}XY$, Z , $\sqrt{XY}$, $Z - X^3$, $\frac{X+Y}{Z}$, Y^{2012} .
- Найдите коэффициент и буквенную часть одночлена:
а) $-8XY$; б) $2X^2YZ$; в) $-\sqrt{3}XZ^2$; г) $3,9Y^4Z^{10} \cdot 2$.
- Запишите одночлены так, чтобы каждая переменная встречалась только один раз:
а) $XYXZ$; б) $YZYZYZ$;
в) $2XYX^2Y^2Z\sqrt{3}$; г) $XZYZYZ$.
- Исследуйте!** Найдите степень одночлена:
а) X^3YZ ; б) $-2XZ^5$; в) $0,1X^2Y$; г) $\sqrt{3}YZ$.
- Укажите подобные одночлены:
а) $5XY$, $3X^2$, $-XY$, Z^3Y , $-0,25X^2$, YZ^3 , XYZ ;
б) XY^2 , $-8,5Y^3$, $-2Y^2X$, $0,8Y^3$, $X^3Y^3Z^3$, XY .
- Приведите подобные слагаемые:
а) $XY - 3Y^4 + 2,5XY + 8Y^4$; б) $3Z^2 - 2XY - 0,2Z^2 + 10XY$.
- Выполните действия:
а) $-4X^2Y \cdot 3XY^2$; б) $8,2XZ \cdot 5X^3YZ$;
в) $\sqrt{3}YZ \cdot \sqrt{3}XZ^3$; г) $7\frac{1}{3}X \cdot 2\frac{1}{2}XY$.
- Работайте в парах!** Выполните действия:
а) $(3X^5Y)^3$; б) $(-2XYZ^4)^2$;
в) $(\sqrt{2}XY^3)^4$; г) $(1,5ZY^3)^3$.
- Выполните действия:
а) $16X^3Y : (-2XY)$; б) $-6,4Y^2Z^3 : 0,4YZ$;
в) $2\sqrt{3}X^2Z^5 : \sqrt{3}XZ^2$; г) $7\frac{1}{3}X^3Y^3Z^3 : \frac{1}{3}XYZ$.
- Выполните действия:
а) $7,3XY - 8Y^3 + 2(0,5Y^3 + XY) - ZY$;
б) $3\frac{1}{4}ZY + 4\left(\frac{1}{8}ZY - Z^2\right) + 3Z^2 + XY$.
- Работайте в парах!** Выполните действия:
а) $3XY \cdot 0,2X^2Y^3Z - (2XY)^3 + (1,2XY)^2 \cdot XY$;
б) $-5ZY \cdot 0,4Z^3YX + (0,1ZY^2)^2 \cdot X^3Y - (-XYZ)^3$.

В₁

12. Выполните действия:

а) $18X^3Y^5 : 0,3XY^4 - (2X^2Y + 4,8X^4Z : 1,6XZ)$; б) $-9XY^3Z^2 : 30Y^2Z - (-7XYZ + 12X^2Z^2 : 0,4XZ^2)$.

13.  **Исследуйте!** Дополните показатели степеней так, чтобы степень одночлена была бы равна 10:

а) $3X^{\blacksquare}Y^2Z^{\blacksquare}$; б) $(Y^2Z^3)^{\blacksquare}$; в) $(X^{\blacksquare}Y^{\blacksquare}Z)^{\blacksquare}$; г) $(-\sqrt{5}X^2Y^{\blacksquare}Z^{\blacksquare})^2$.

14.  **Исследуйте!** Найдите истинностное значение высказывания:

а) Одночлены XY и X^2Y^2 подобны. б) Одночлены $26X^2Y$ и $-X^2Y$ можно сократить.

н/п

С₁15.  **Исследуйте!** Найдите закономерность и впишите недостающий одночлен:

$\sqrt{2}X^2Y^3$	3	$2\sqrt{2}X^6Y^9$
$-\sqrt{3}ZY^5$	2	?

16. Дополните последовательность одночленов:

а) $XYZ, X^2YZ, X^2Y^2Z, \blacksquare$; б) $X^8Y^4Z^2, X^8Y^4, X^8Y^2, \blacksquare$.

§2 Многочлены

2.1. Операции над многочленами



определение

Многочленом (полиномом) называется сумма двух или нескольких одночленов.

Запомните!

Многочлены обозначаются заглавными буквами латинского алфавита (P, Q и т. д.): $P(X) = X^3 - 2X^2 + 5$, $Q(X, Y) = 3X^2Y - XY + X$, $R(X, Y, Z) = XYZ - 3$. Коэффициентами многочлена являются коэффициенты его слагаемых. Многочлен, коэффициенты которого равны 0, называется **нулевым многочленом**: 0. Слагаемое, не содержащее переменные, называется **свободным членом**. **Степенью многочлена P** называют наибольшую из степеней входящих в него ненулевых одночленов. Обозначается „grad P ”.

Например, для многочлена $P(X) = X^3 - 2X^2 + 5$ имеем grad $P(X) = 3$.

Многочлен, состоящий из двух слагаемых, называется **двучленом** или **биномом**, а из трех слагаемых – **трехчленом**.

Одночлен также является полиномом (многочленом).

Даны одночлены: $7X^3Y$, $\sqrt{3}XYZ$, X^6 , $-7XZ$, 5.

а) Составим из данных одночленов: один многочлен от переменных X, Y , второй – от переменной X и третий – от переменных X, Y, Z .

б) Найдём коэффициенты и свободный член первого многочлена из пункта а).

Решение:

а) $P(X, Y) = 7X^3Y + X^6 - 5$, $Q(X) = X^6 + 5$, $T(X, Y, Z) = 7X^3Y + \sqrt{3}XYZ - X^6 - 7XZ + 5$.

б) Коэффициенты $P(X, Y) = 7, 1, -5$, а -5 является свободным членом.

Числовое значение многочлена при указанных значениях переменных – это число, полученное в результате выполнения всех операций после подстановки указанных значений переменных. Например, числовое значение многочлена $P(X, Y)$, полученного в пункте а) решенного выше задания, при $X = \sqrt{2}$, $Y = 5$ равно:

$$P(\sqrt{2}, 5) = 7 \cdot (\sqrt{2})^3 \cdot 5 + (\sqrt{2})^6 - 5 = 70\sqrt{2} + 8 - 5 = 70\sqrt{2} + 3.$$

Сумма (соответственно, **разность**) двух многочленов P и Q есть многочлен $P + Q$ (соответственно $P - Q$).


**Задание
с решением**

Как правило, в полученном выражении приводят подобные члены.

Например, разность многочленов $P(X, Y)$ и $Q(X)$ из решенного выше задания есть многочлен $P(X) - Q(X) = 7X^3Y + X^6 - 5 - (X^6 + 5) = 7X^3Y - 10$.

○ Запомните!

Свойства сложения многочленов

Для любых многочленов P, Q, R справедливы свойства:

1° **Коммутативность**: $P + Q = Q + P$.

2° **Ассоциативность**: $(P + Q) + R = P + (Q + R)$.

3° Нулевой многочлен является нейтральным элементом при сложении многочленов: $P + 0 = P$.

4° Для любого многочлена P существует **противоположный** ему многочлен, $-P$: $P + (-P) = 0$.



Определение

Произведением двух многочленов P, Q является многочлен $P \cdot Q$, который представляет собой сумму произведений каждого члена многочлена P на каждый член многочлена Q .

Как правило, в полученной сумме приводят подобные слагаемые.

Например: $(7X^3Y + X^6 - 5) \cdot (X^6 + 5) =$

$$= 7X^3Y \cdot X^6 + X^6 \cdot X^6 - 5 \cdot X^6 + 7X^3Y \cdot 5 + X^6 \cdot 5 - 5 \cdot 5 = 7X^9Y + X^{12} + 35X^3Y - 25.$$

Свойства умножения многочленов

Для любых многочленов P, Q, R справедливы свойства:

1° **Коммутативность**: $P \cdot Q = Q \cdot P$.

2° **Ассоциативность**: $(P \cdot Q) \cdot R = P \cdot (Q \cdot R)$.

3° $P \cdot 0 = 0$.

4° Многочлен 1 является **нейтральным элементом** при умножении многочленов: $P \cdot 1 = 1 \cdot P = P$.

5° Умножение многочленов **дистрибутивно относительно сложения/вычитания**: $P \cdot (Q \pm R) = P \cdot Q \pm P \cdot R$.

Использование этих свойств упрощает вычисления.

Пример

$$(XY - 3Z) \cdot (1 - X^3) + (XY - 3Z)(1 + X^3) = (XY - 3Z) \cdot (1 - X^3 + 1 + X^3) = (XY - 3Z) \cdot 2 = 2XY - 6Z.$$

2.2. Разложение многочленов на множители

Важную роль при выполнении вычислений играет разложение многочленов на множители, то есть представление их в виде произведения многочленов.

○ Запомните!

Вот некоторые часто используемые **методы** разложения многочленов на множители:

• **метод вынесения общего множителя**: $P \cdot Q + P \cdot R + P \cdot H = P(Q + R + H)$.

• **метод группировки**: $P \cdot Q + R \cdot Q + P \cdot H + R \cdot H = (P \cdot Q + P \cdot H) + (R \cdot Q + R \cdot H) = P(Q + H) + R(Q + H) = (Q + H)(P + R)$.

• **разложение на множители** трехчлена второй степени:

$aX^2 + bX + c = a(X - x_1)(X - x_2)$, где x_1, x_2 — решения уравнения второй степени $ax^2 + bx + c = 0$, связанного с этим трехчленом;

• использование **формул сокращенного умножения**;

• комбинированные методы.

Примеры

Используя адекватные методы, разложим на множители многочлен:

а) $(6X - 5)^2 - (25X^2 - 40X + 16)$; б) $X^6 + 2X^3 - 3$.

*Решение:*а) Замечаем, что $25X^2 - 40X + 16 = (5X - 4)^2$.Значит, $(6X - 5)^2 - (5X - 4)^2 = (6X - 5 + 5X - 4) \cdot (6X - 5 - (5X - 4)) = (11X - 9)(X - 1)$.б) Обозначим $X^3 = t$, тогда трехчлен $t^2 + 2t - 3$ разлагается на множители $(t - 1)(t + 3)$, значит $X^6 + 2X^3 - 3 = (X^3 - 1)(X^3 + 3) = (X^3 - 1^3)(X^3 + (\sqrt[3]{3})^3) = (X - 1)(X^2 + X + 1)(X + \sqrt[3]{3})(X^2 - \sqrt[3]{3}X + \sqrt[3]{9})$.**Упражнения и задачи****Реальный профиль****A₁**

- Даны многочлены $P(X) = X^3 - 3X^2 + \sqrt{2}X + 1$ и $Q(X, Y) = X^4 - X^3 + X^2Y - XY^2 + \sqrt{5}$.
 - Найдите степени этих многочленов, перечислите коэффициенты многочленов $P(X)$ и $Q(X, Y)$.
 - Вычислите числовое значение многочлена $P(X)$ при $X = 2$.
 - Найдите числовое значение многочлена $Q(X, Y)$ при $X = -2, Y = 1$.
- Даны многочлены $P(X) = -X^4 - 8X^3 + X^2 - 3X$ и $Q(X) = X^3 + 5X^2$.
 - Выполните действие: $P(X) + Q(X) = S(X)$; $P(X) - Q(X) = D(X)$; $Q(X) - P(X) = R(X)$.
Вычислите и сравните: а) $S(3)$ с $P(3) + Q(3)$; б) $D(-1)$ с $P(-1) - Q(-1)$.
 - Установите связь между многочленами $D(X)$ и $R(X)$.
-  **Работайте в парах!** Даны многочлены $P(X) = 5X^2 - 1$; $Q(X) = 5X^2 + 1$; $R(X) = X^4 + 2X^2 + 1$.
Найдите:
 - $P(X) + Q(X) - R(X)$;
 - $P(X) \cdot Q(X)$;
 - $P(X) \cdot R(X)$;
 - $P(X) \cdot Q(X) - R(X)$;
 - $P^2(X)$;
 - $P^2(X) \cdot Q^2(X)$.
-  **Исследуйте!** Дополните до полного квадрата бинома:
 - $16X^2 + \dots + 1$;
 - $9X^2 - \dots + 25Y^2$;
 - $X^2 + 10XY + \dots$;
 - $3X^2 - \dots + 64Y^2$.
- Методом группировки разложите на множители:
 - $7X^4 - 9X^3 - 7X^2 + 9X$;
 - $X^4 + X^3Y - X^2 - XY$;
 - $X^3 - 5X^2 + 4X - 20$.
- Разложите на множители многочлен:
 - $25X^2 - 10X + 1$;
 - $0,25X^2 + X + 1$;
 - $X^3 - 6X^2 + 12X - 8$;
 - $X^3 + 3X^2 + 3X + 1$.
- Используя формулы: разность квадратов, сумма (разность) кубов, разложите на множители многочлен:
 - $0,64X^2 - Y^2$;
 - $5X^2 - 45Y^2$;
 - $125X^3 - 64Y^3$;
 - $729X^3 + 1$.
- Разложите на множители трехчлен:
 - $X^2 - 2X - 8$;
 - $4X^2 - 3X - 1$;
 - $-X^2 + X + 2$.
- Даны многочлены $P(X) = 2X^3 - X$ и $Q(X, Y) = X^2 + Y^2$. Найдите истинностное значение высказывания.
 - $Q^2(X, Y) = X^4 + 2X^2Y^2 + Y^4$.
 - $P(X) + Q(X) = 2X^3 + X^2 - X + Y^2$.

B₁

-  **Работайте в группах!** Даны многочлены $P(X) = 8X^3 - X^2 + 10X - \sqrt{7}$ и $Q(X) = mX^3 + kX^2 + pX + n$ ($m, n, k, p \in \mathbb{R}$).
 - Найдите действительные значения параметров m, n, k, p , при которых многочлены $P(X)$ и $Q(X)$ равны.
 - Определите степени многочленов $P(X), Q(X)$ в зависимости от параметров.
 - При каких действительных значениях параметров m, n, k, p многочлен $Q(X)$ является нулевым?
 - Вычислите: $P(-1), P(0), Q(-1), Q(0)$.
- Даны многочлены $P(X) = X^5 - 7kX^2 + 2X - k$ и $Q(X) = -X^5 + X^2 - 2X + k$.
Найдите действительное значение параметра k , при котором $S(X) = P(X) + Q(X)$ является нулевым многочленом.
- Дан многочлен $P(X) = aX^4 + 2X^2 + bX - X^3 + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.
 - Найдите значения коэффициентов a, b, c , зная, что многочлен $P(X)$ равен $5X^4 - X^3 + 2X^2 - 8$.
 - Определите многочлен $Q(X)$, зная, что $P(X) + Q(X) = 0$.

13. Разложите на множители многочлен:

а) $X^3 + 2X^2(X - 2) - 8$;

б) $X^6 - 4X^3 + 4$;

в) $X^5 - X^3Y^2 + 5X^2 + 5XY$;

г) $X^4 - X^2 + 2X + 2$.

14.  **Работайте в парах!** Разложите на множители трехчлен:

а) $8X^2 + 3X - 0,5$;

б) $-0,1X^2 - X - 20$;

в) $X^2 - \sqrt{5}X - 2$.

С

15. Дан многочлен $R(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Найдите значения коэффициентов a, b, c, d , если: $R(0) = 1$, $R(-1) = 0$, $R(1) = -1$, $a = c$.

16. Используя изученные формулы, разложите на множители многочлен с целыми коэффициентами:

а) $(6X + 3)^2 - (5X - 4Y)^2$;

б) $8X^3 - (XY - 5)^3$;

в) $125X^3 + (X + 1)^3$.

17. Определите многочлен второй степени с целыми коэффициентами $P(X)$ такой, что $P(\alpha^3) = (P(\alpha))^3$ для любых $\alpha \in \mathbb{R}$.

18. Разложите на множители многочлен:

а) $X^8 + 3X^4 - 4$;

б) $X^{4n} - 16$, $n \in \mathbb{N}^*$;

в) $X^{2n+1} - X$, $n \in \mathbb{N}^*$.

§3 Многочлены от одной переменной

3.1. Общие понятия



определение

Выражения вида $a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n$, (1)

где $n \in \mathbb{N}$ и $a_i \in \mathbb{R}$ для любых $i = 0, 1, 2, \dots, n$ (обозначают $i = \overline{0, n}$), называется **многочленом от переменной X** .

Если числа $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ принадлежат множеству $\mathbb{R}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$, то выражение (1) является многочленом от переменной X с действительными (рациональными, целыми) коэффициентами.

Запомните!

Числа $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ называются **коэффициентами** многочлена (1), выражения $a_0, a_1X, a_2X^2, \dots, a_nX^n$ называются **членами** этого многочлена, а коэффициент a_0 называется **свободным членом** многочлена (1).

Если $n = 0$, то выражение (1) имеет вид a_0 . Таким образом, любое число является многочленом и такие многочлены называются **постоянными многочленами**.

Пример

Следующие выражения являются многочленами от переменной X :

$2 + X + X^2 + 0X^3 + 0X^4$; $7 + 9X^2 + 3X + 5X^3$; $\sqrt{3}$.

Запомните!

Канонический (стандартный) вид ненулевого многочлена (1) это многочлен $a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n$, $a_n \neq 0$, где n – наибольшее натуральное число k такое, что $1 \leq k \leq n$ и $a_k \neq 0$.

Пример

Каноническим видом многочленов $2 + 0X + 3X^2$, $2 + 0X + 3X^2 + 0X^3$ является многочлен $2 + 3X^2$, а каноническим видом многочленов $7 + 3X^2 + X$ и $7 + X + 3X^2 + 0X^3 + 0X^4$ является многочлен $7 + X + 3X^2$.



определение

Два **многочлена** от переменной X **равны**, если они имеют один и тот же канонический вид.

Примеры

1. Многочлены $1 + 3X + \sqrt{5}X^2$ и $1 + \sqrt{5}X^2 + 3X + 0X^3 + 0X^4$ равны.

2. Многочлены $2 + aX + 5X^2 + 4X^3 + 8X^4$ и $2 + 7X + bX^2 + 4X^3 + cX^4 + dX^5$ равны, если и только если $a = 7$, $b = 5$, $c = 8$, $d = 0$.

О Запомните!

1. Произвольный многочлен $a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n$ равен многочлену $a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n + 0X^{n+1} + \dots + 0X^{n+k}$ для любого $k \in \mathbb{N}$.
2. Многочлены $a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_mX^m$, $a_m \neq 0$, и $b_0 + b_1X + b_2X^2 + \dots + b_nX^n$, $b_n \neq 0$, равны, если и только если $m = n$ и $a_i = b_i$ для любого $i = \overline{0, m}$ (равны коэффициенты соответствующих членов).

Задание
с решением

Для любых действительных значений параметров a и b многочлены $P(X) = a(2 + 3X + 5X^2) + (b + X)(1 + X + X^2)$ и $Q(X) = 1 + 2X + 2X^2 + X^3$ равны?

Решение:

Выполнив соответствующие операции, приводим многочлен $P(X)$ к каноническому виду и приравниваем многочлены:

$$2a + 3aX + 5aX^2 + b + bX + bX^2 + X + X^2 + X^3 = 1 + 2X + 2X^2 + X^3,$$

$$2a + b + (3a + b + 1)X + (5a + b + 1)X^2 + X^3 = 1 + 2X + 2X^2 + X^3.$$

Из определения равенства двух многочленов следует:

$$\begin{cases} 2a + b = 1, \\ 3a + b + 1 = 2, \\ 5a + b + 1 = 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 1, \\ 3a + b + 1 = 2, \\ 2a = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0, \\ b = 1. \end{cases}$$

Ответ: $a = 0$, $b = 1$.

Как правило, многочлены от переменной X обозначаются $P(X)$, $Q(X)$, $R(X)$ и т. п.



Определения

Пусть многочлен $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n$, $a_n \neq 0$. Тогда a_nX^n называется **старшим членом** многочлена $P(X)$, а число a_n называется **старшим коэффициентом** многочлена $P(X)$.

Пример

Даны многочлены $P(X) = 2 + 3X + X^2 + 0X^3$ и $Q(X) = \sqrt{2} + 3\sqrt{3}X + 0X^2 + 5X^3$. Заметим, что $\text{grad } P(X) = 2$ и $\text{grad } Q(X) = 3$. Старший коэффициент многочлена $P(X)$ равен 1, а старший коэффициент многочлена $Q(X)$ равен 5.



Замечания

1. Степень нулевого многочлена не определяется.
2. Любое ненулевое число является многочленом, степень которого равна 0.
3. Для упрощения записи конкретного многочлена условимся опускать слагаемые с нулевыми коэффициентами, слагаемые вида $1X^k$ заменить на X^k , а выражения вида $+(-a)X^k$ на $-aX^k$.

Например, многочлен $3 + (-4)X + 1X^2 + 0X^3 + 0X^4 + (-5)X^5$ запишем в виде $3 - 4X + X^2 - 5X^5$.

Задание
с решением

Определим степень многочлена:

$$P(X) = 3a + 2X + (a^2 - 1)X^2 + (a^3 + 3a + 4)X^3 + (a^2 - a - 2)X^4.$$

Решение:

Для различных значений действительного параметра a получаем различные многочлены. Поэтому степень многочлена $P(X)$ зависит от значений параметра a . Если $a^2 - a - 2 \neq 0$, то есть $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$, то $\text{grad } P(X) = 4$. Для $a = -1$, $P(X) = -3 + 2X$ и $\text{grad } P(X) = 1$. Для $a = 2$, $P(X) = 6 + 2X + 3X^2 + 18X^3$ и $\text{grad } P(X) = 3$.

Пусть A – ненулевое множество множества $\mathbb{R}$. Обозначим через $A[X]$ множество многочленов от переменной X с коэффициентами из A . В частности, через $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{Z}[X]$ обозначим множество многочленов от переменной X с действительными, рациональными, целыми коэффициентами соответственно. Так как $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, то $\mathbb{Z}[X] \subset \mathbb{Q}[X] \subset \mathbb{R}[X]$ и $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}[X]$, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}[X]$.

**Определение**

Пусть $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n \in \mathbb{R}[X]$ и $\alpha \in \mathbb{R}$.

Число $a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \dots + a_n\alpha^n$ называется **значением** многочлена $P(X)$ при $X = \alpha$ и обозначается через $P(\alpha)$. Если $P(\alpha) = 0$, тогда α называется **корнем** многочлена $P(X)$.

Пример

Пусть $P(X) = 2 + X + 3X^2$. Тогда $P(-2) = 2 + (-2) + 3(-2)^2 = 12$.

**Замечания**

1. Если A – одно из множеств $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ и $P(X) \in A[X]$, то $P(\alpha) \in A$ для любого $\alpha \in A$.

2. Значение любого многочлена в нуле равно свободному члену этого многочлена $P(0) = a_0$.

**Определение**

Пусть A – одно из множеств $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ и $P(X) \in A[X]$. Функция $f: A \rightarrow A$, $f(x) = P(x)$, называется **функцией-многочленом** (или **полиномиальной функцией**), соответствующей многочлену $P(X)$.

Пример

Полиномиальной функцией, соответствующей многочлену

$P(X) = 2 + 4X^2 + 3X^3 \in \mathbb{R}[X]$, является функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2 + 4x^2 + 3x^3$.

3.2. Сложение, вычитание и умножение многочленов

О Запомните!

Сложение, вычитание и произведение многочленов от одной переменной выполняется по тем же правилам, что и для многочленов с несколькими переменными, поэтому эти операции обладают теми же свойствами.

**Задание с решением**

Запишем в каноническом виде сумму, разность и произведение многочленов: $P(X) = X^3 - 6X^2 + 12X - 8$ и $Q(X) = X^3 + 3X^2 + 1$.

Решение:

$$P(X) + Q(X) = -7 + 12X - 3X^2 + 2X^3; \quad P(X) - Q(X) = -9 + 12X - 9X^2;$$

$$P(X) \cdot Q(X) = (-8 + 12X - 6X^2 + X^3) \cdot (1 + 3X^2 + X^3) = \\ = -8 + 12X - 30X^2 + 29X^3 - 6X^4 - 3X^5 + X^6.$$

О Запомните!

1. Если $P(X)$ и $Q(X)$ ненулевые многочлены, то:

- $\text{grad}(P(X) + Q(X)) \leq \max(\text{grad } P(X), \text{grad } Q(X))$ ($Q(X) \neq -P(X)$);
- $\text{grad}(P(X) \cdot Q(X)) = \text{grad } P(X) + \text{grad } Q(X)$.

2. Если $R(X) = P(X) + Q(X)$, $S(X) = P(X) \cdot Q(X)$, то для любых $a \in \mathbb{R}$ имеем:

- $R(a) = P(a) + Q(a)$; б) $S(a) = P(a) \cdot Q(a)$.

3.3. Деление многочленов

3.3.1. Деление многочленов. Теорема деления с остатком

При вычислениях с целыми числами часто применяется теорема деления с остатком. Аналогичная теорема верна и для многочленов.

**Теорема 1****(теорема деления с остатком)**

Для любых многочленов $D(X)$, $I(X) \in \mathbb{R}[X]$, $I(X) \neq 0$, существуют однозначно определенные многочлены $C(X)$, $R(X) \in \mathbb{R}[X]$, такие, что $D(X) = I(X)C(X) + R(X)$, где $R(X) = 0$ или $\text{grad } R(X) < \text{grad } I(X)$. (2)

В (2) многочлен $D(X)$ называется **делимым**, $I(X)$ – **делителем**, $C(X)$ – **неполным частным**, а $R(X)$ – **остатком**. Если $R(X) = 0$, тогда $I(X)$, $C(X)$ называют **делителями** $D(X)$ (обозначают $I(X) | D(X)$, $C(X) | D(X)$), а $D(X)$ называют **кратным** этих многочленов, или говорят, что $D(X)$ делится на $I(X)$, $C(X)$.

О Запомните!

При делении с остатком многочлена $D(X)$ на $I(X)$ выполняются четыре арифметические действия (сложение, вычитание, умножение, деление) над их коэффициентами. Если коэффициенты многочленов $D(X)$ и $I(X)$ действительные (соответственно рациональные) числа, то коэффициенты частного $C(X)$ и остатка $R(X)$ также являются действительными (соответственно рациональными) числами.

Представим алгоритм нахождения частного и остатка от деления двух многочленов, называемый **алгоритмом деления многочленов с остатком**.

Для выполнения деления многочлена $D(X)$ на ненулевой многочлен $I(X)$:

- 1) записываем оба многочлена в порядке убывания степеней их членов;
- 2) выполняем деление столбиком (аналогично делению натуральных чисел) так, чтобы члены частного представляли собой результаты деления основного члена делимого (и тех, которые появятся позже) на основной член делителя;
- 3) деление выполняется до тех пор, пока остаток будет представлять собой многочлен степени ниже степени делителя.



Задание с решением

Найдем частное и остаток деления многочлена $D(X) = 3X^4 + 8X^3 - 4X^2 - 2X + 1$ на трехчлен $I(X) = 2X^2 + 2X - 3$.

Решение:

$$3X^4 : 2X^2 = \frac{3}{2}X^2$$

$$5X^3 : 2X^2 = \frac{5}{2}X$$

$$-\frac{9}{2}X^2 : 2X^2 = -\frac{9}{4}$$

$$\left(-\frac{3}{2}X^2\right) \cdot (2X^2 + 2X - 3) = -3X^4 - 3X^3 + \frac{9}{2}X^2$$

$$\begin{array}{r} 3X^4 + 8X^3 - 4X^2 - 2X + 1 \\ -3X^4 - 3X^3 + \frac{9}{2}X^2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5X^3 + \frac{1}{2}X^2 - 2X + 1 \\ + -5X^3 - 5X^2 + \frac{15}{2}X \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -\frac{9}{2}X^2 + \frac{11}{2}X + 1 \\ + \frac{9}{2}X^2 + \frac{9}{2}X - \frac{27}{4} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10X - \frac{23}{4} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \overbrace{2X^2 + 2X - 3}^{I(X)} \\ \frac{\frac{3}{2}X^2 + \frac{5}{2}X - \frac{9}{4}}{\underbrace{C(X)}} \end{array}$$

Ответ: Неполным частным является $C(X) = \frac{3}{2}X^2 + \frac{5}{2}X - \frac{9}{4}$,

а остаток равен $R(X) = 10X - \frac{23}{4}$.



Задание

• Проверьте верность равенства: $D(X) = I(X) \cdot C(X) + R(X)$.

3.3.2. Деление многочлена на бином $X - c$

Даны многочлен $P(X)$, $\text{grad } P(X) \geq 1$, и бином $(X - c)$. Из теоремы деления с остатком следует, что существуют такие многочлены $C(X)$, $R(X)$, что

$$P(X) = (X - c)C(X) + R(X), \text{ где } R(X) = 0 \text{ или } \text{grad } R(X) < \text{grad}(X - c) = 1. \quad (3)$$

Так как $\text{grad } R(X) = 0$ или $R(X) = 0$, то $R(X)$ – постоянный многочлен, т.е. $R(X) = r$, где $r \in \mathbb{R}$.

Подставляя в (3) $X = c$ и $R(X) = r$, имеем $P(c) = (c - c)Q(c) + r$, откуда $r = P(c)$. Таким образом, получили следующий результат:



Теорема 2

(теорема Безу¹)

Остаток от деления многочлена $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ на бином $(X - c) \in \mathbb{R}[X]$ равен $P(c)$.

¹ Этьен Безу (1730–1783) – французский математик

Эта теорема позволяет находить остаток от деления произвольного многочлена на бином $X - c$, не выполняя деления.

Следствие

Число c является корнем многочлена $P(X)$, если и только если $P(X) = (X - c) \cdot C(X)$ (бином $X - c$ является делителем $P(X)$).

Пример

Остаток от деления многочлена $P(X) = X^4 + 2X^3 - 14X^2 - 2X + 18$ на бином $X - 3$ равен $r = P(3) = 3^4 + 2 \cdot 3^3 - 14 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3 + 18 = 21$.

**Задание с решением**

Найдем остаток от деления многочлена $P(X) = X^4 + mX^2 + mX - 1$ на бином $X - m$, если остаток от деления $P(X)$ на бином $X - 1$ равен -6 .

Решение:

По теореме Безу $P(1) = -6$, значит $1^4 + m \cdot 1 + m \cdot 1 - 1 = -6 \Rightarrow m = -3$ и $P(X) = X^4 - 3X^2 - 3X - 1$. Получим остаток $P(m) = P(-3) = 62$.

Рассмотрим многочлен $P(X) = a_m X^m + a_{m-1} X^{m-1} + \dots + a_1 X + a_0$, $a_m \neq 0$.

По теореме 2, существуют $C(X)$ и r такие, что $P(X) = (X - c)C(X) + r$.

Практически вычисление коэффициентов $b_{m-1}, b_{m-2}, \dots, b_1, b_0$ частного $C(X)$ и остатка r выполняется с помощью следующей таблицы, называемой *схемой Горнера*¹:

	a_m	a_{m-1}	a_{m-2}	$\dots$	a_1	a_0
c	$b_{m-1} = a_m$	$b_{m-2} = a_{m-1} + cb_{m-1}$	$b_{m-3} = a_{m-2} + cb_{m-2}$	$\dots$	$b_0 = a_1 + cb_1$	$r = a_0 + cb_0$

**Задание с решением**

Применяя схему Горнера, найдем частное и остаток при делении многочлена $P(X) = 2X^4 - 4X^3 - 2X^2 + 5$ на бином $X - 3$.

Решение:

Составим таблицу (записываются включительно нулевые коэффициенты):

	2	-4	-2	0	5
3	2	$-4 + 3 \cdot 2 = 2$	$-2 + 3 \cdot 2 = 4$	$0 + 3 \cdot 4 = 12$	$5 + 3 \cdot 12 = 41$

Ответ: Неполное частное – $C(X) = 2X^3 + 2X^2 + 4X + 12$, остаток $-r = 41$.

Упражнения и задачи



Реальный профиль

A₁

- Найдите $a, b, c \in \mathbb{R}$, при которых $P(X) = Q(X)$, если:
 - $P(X) = 4 + (c+b)X + (c+b)X^2 + cX^3 + aX^4$, $Q(X) = 4a + (2a-1)X + X^2 + (a+2)X^3 + X^4$;
 - $P(X) = 2b + (2a+1)X + 3X^2$, $Q(X) = 2a - b + (3b+1)X + aX^2 + cX^3$.
- Найдите степень многочлена $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ в зависимости от a , если:
 - $P(X) = 3 + aX + (a+1)X^2 + (a^2-1)X^3$;
 - $P(X) = a + (a^2-1)X + (a^2+2a-3)X^2 + (a^2+3a-4)X^4$.
- Вычислите $P(1)$, $P(-2)$, $P(3)$, $Q(\sqrt{2} + \sqrt{3})$, если $P(X) = 2 + X - X^2 - 2X^3 - X^4 + X^5$ и $Q(X) = X^4 - 10X^2 + 6$.
- (ЕАЭ, 2022) Найдите остаток от деления многочлена $P(X) = 2X^3 + X^2 - 5X + 1$ на бином $X - 2$.
- Найдите $P(c)$, если $P(X) = X^7 + 6X^6 + 3X^5 - 15X^4 - 17X^3 + 2X^2 + 3X + 1$, $c = 2$.
- Вычислите $P(X) + Q(X)$, $P(X) - Q(X)$ и $P(X) \cdot Q(X)$, если $P(X) = -5X + 3X^2 + 2X^3$, $Q(X) = 1 + 2X - 3X^2$.
- Найдите частное $C(X)$ и остаток $R(X)$ от деления многочлена $P(X)$ на бином $Q(X)$, если:
 - $P(X) = X^6 - 3X^4 + 2X^3 - 3X + 4$, $Q(X) = X - 2$;
 - $P(X) = 2X^5 + 5X^4 + 4X^3 - 7X^2 + 2X + 1$, $Q(X) = X + 3$;
- (ЕАЭ, 2022) $P(X) = 2X^3 + X^2 - 5X + 1$, $Q(X) = X - 2$.

¹ Вильям Горнер (1786–1837) – английский математик

B₁

8. Найдите частное и остаток от деления многочлена $P(X)$ на многочлен $Q(X)$, где:
- $P(X) = 2X^4 + 3X^3 - 2X^2 + 3X + 1$, $Q(X) = X + 1$ (применяя схему Горнера);
 - $P(X) = 3X^5 - 2X^4 - 3X^2 + 5X + 4$, $Q(X) = X^3 + 2X + 3$;
 - $P(X) = 2X^3 + 3X^2 - 5X$, $Q(X) = 3X^2 + 2X - 1$;
 - $P(X) = 2X^6 + 3X^5 - 4X^4 + 2X^3 - 3X^2 + 2X + 1$, $Q(X) = X^2 - 3X + 2$.
9. Какая из точек $A(1; 1)$ и $B(2; 9)$ принадлежит графику полиномиальной функции, соответствующей многочлену $P(X) = X^3 + 2X - 3 \in \mathbb{R}[X]$?
10. Остатки от деления многочлена $P(X)$ на биномы $X - 2$ и $X - 3$ равны соответственно 2 и 5. Найдите остаток от деления многочлена $P(X)$ на трехчлен $X^2 - 5X + 6$.
11. Остатки от деления многочлена $P(X)$ на трехчлен $X^2 + 7X + 12$ равен $3X + 14$. Найдите остаток от деления многочлена $P(X)$ на биномы $X + 3$ и $X + 4$ соответственно.
12. Найдите действительные значения параметра a , при которых остаток от деления многочлена $P(X)$ на бином $Q(X)$ равен r , если: а) $P(X) = X^4 + aX^3 - 6X^2 + 3X + 4$, $Q(X) = X + 3$, $r = -5$;
б) $P(X) = X^3 + (a^2 + 3)X^2 + 2aX + 4a + 5$, $Q(X) = X - 2$, $r = 37$.
13. Найдите многочлен второй степени $P(X) \in \mathbb{R}[X]$, если:
- $P(1) = 4$, $P(-1) = 2$, $P(-2) = 4$;
 - $P(1) = 6$, $P(-3) = 18$, $P(2) = 13$.

C₁

14. При каких значениях a , b и c многочлен $P(X)$ делится без остатка на многочлен $Q(X) = X^2 + cX + 1$:
- $P(X) = X^4 + aX + b$;
 - $P(X) = X^3 + aX + b$;
 - $P(X) = X^5 + aX + b$;
15. Найдите остаток от деления многочлена $P(X)$ на многочлен $Q(X)$, если:
- $P(X) = X^{42} - 3X^{21} + 4$, $Q(X) = X^2 - 1$;
 - $P(X) = X^{19} + X^{13} + 2X^{10} + 2X^3 + 2$, $Q(X) = X^2 + 1$;
 - $P(X) = X^{18} - 2X^{17} + 3X^{12} - X^6 + 2X^5 - 1$, $Q(X) = X^4 - 1$.
16. Остатки от деления многочлена $P(X)$ на биномы $X - 1$, $X - 2$, $X - 3$ равны соответственно 2, 3 и 4. Найдите остаток от деления многочлена $P(X)$ на многочлен $(X - 1)(X - 2)(X - 3)$.
- 17*. Пусть $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ такой многочлен, что $(x + 1)P(x) + (x - 1)P(x + 3) = 4x + 6$ для любого $x \in \mathbb{R}$. Найдите остаток от деления многочлена $P(X)$ на многочлен $(X - 1)(X - 2)$.

§4 Корни многочленов

4.1. Понятие корня многочлена

Различные приложения многочленов (решение уравнений, решение текстовых задач, интерполирование функций и др.) основывается на понятии корня многочлена.



**Задание
с решением**

Выясним, являются ли числа 2 и 3 корнями многочлена

$$P(X) = X^5 - 4X^4 + 4X^3 + X^2 - 4X + 4.$$

Решение:

Так как $P(2) = 0$, а $P(3) \neq 0$ (Проверьте!), делаем вывод, что число 2 является корнем многочлена $P(X)$, а число 3 не является его корнем.

Разделив на $X - 2$, получим: $P(X) = (X - 2)(X^4 - 2X^3 + X - 2)$.

Замечаем, что 2 является корнем остатка $C(X) = X^4 - 2X^3 + X - 2$, и $C(X) = (X - 2)(X^3 + 1)$, поэтому $P(X) = (X - 2)^2(X^3 + 1)$.

Таким образом, $P(X)$ делится без остатка на $(X - 2)^2$, но легко проверить, что $P(X)$ не делится без остатка на $(X - 2)^3$. Такие ситуации описываются с помощью кратного корня.



Определение

Число m , $m \in \mathbb{N}^*$, называется m -кратным корнем (корнем кратности m) α многочлена $P(X)$, если $(X-\alpha)^m$ является делителем $P(X)$, а $(X-\alpha)^{m+1}$ не является делителем $P(X)$.

Если $m=1$, то α называется **простым корнем**; если $m \geq 2$, то α называется **кратным корнем** многочлена $P(X)$. При $m=2$ или $m=3$ говорят о **двойном** или **тройном корне** соответственно.

Кратность некоторого корня можно определить с помощью схемы Горнера, разделив многочлен $P(X)$ на $X-\alpha$ ($P(X)=(X-\alpha) \cdot C_1(X)$), затем полученное частное $C_1(X)$ разделив на $X-\alpha$ ($C_1(X)=(X-\alpha) \cdot C_2(X)$, $P(X)=(X-\alpha)^2 \cdot C_2(X)$) и т. д., до тех пор, пока не получится такое частное $C_s(X)$, которое не делится на $X-\alpha$.

Значит, $P(X)=(X-\alpha)^s \cdot C_s(X)$. Число α является корнем кратности s многочлена $P(X)$, так как $(X-\alpha)^{s+1}$ не делится без остатка на $(X-\alpha)^s \cdot C_s(X)$.

В рассмотренном выше примере число 2 является двойным корнем многочлена $P(X)=X^5-4X^4+4X^3+X^2-4X+4$.

Естественно, возникает вопрос, имеет ли произвольный многочлен корни. Основная теорема алгебры утверждает, что любой многочлен $\mathbb{R}[X]$, степень которого больше или равна 1, имеет по крайней мере один корень, но не обязательно является действительным числом.

О Запомните!

Любой многочлен нечетной степени с действительными коэффициентами имеет хотя бы один действительный корень.

Полезным методом определения корней многочлена с целыми коэффициентами (а возможно, и его разложения на множители) является их „поиск” среди делителей свободного члена многочлена.



Задание с решением

Разложим на множители многочлен: $P(X)=X^4-2X^3+2X^2-2X+1$.

Решение:

Рассмотрим числа ± 1 , которые являются делителями свободного члена 1.

Имеем $P(1)=0$, значит, по теореме Безу, $P(X)$ делится на $X-1$:

$$P(X)=(X-1)(X^3-X^2+X-1).$$

Аналогично поступаем с частным $C(X)=X^3-X^2+X-1$, для которого $X=1$ является корнем, значит $C(X)=(X-1)(X^2+1)$.

Таким образом, удалось найти корни многочлена $P(X)$: $X_0=1$ – двойной корень, а также разложить его на множители: $P(X)=(X-1)^2(X^2+1)$.

4.2. Разложение многочленов на неприводимые множители

Пусть A – одно из множеств $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ и $P(X) \in A[X]$, $\text{grad } P(X)=n$, $n \geq 1$.

Многочлен $P(X)$ называется **приводимым над A** , если существуют многочлены $Q(X)$, $C(X) \in A(X)$, степень которых не меньше 1, такие, что $P(X)=Q(X) \cdot C(X)$. В противном случае многочлен называется **неприводимым над A** .

Примеры

1. Любой многочлен степени 1 с коэффициентами из A является неприводимым над A .
2. Многочлен $P(X)=X^2+3$ является неприводимым над $\mathbb{R}$, так как соответствующее ему уравнение $x^2+3=0$ не имеет действительных решений.
3. Многочлен $Q(X)=X^2-3$ является приводимым над $\mathbb{R}$, поскольку $Q(X)=(X-\sqrt{3})(X+\sqrt{3})$, однако он является неприводимым над $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$.

На основании следствия из теоремы Безу, зная его корни, можем разложить многочлен на множители. Кроме того, можно доказать, что любой многочлен $P(X) \in \mathbb{R}[X]$, $\text{grad } P \geq 1$, может быть представлен в виде:

$$P(X) = a_n (X - \beta_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (X - \beta_s)^{k_s} \cdot (X^2 + b_1 X + c_1)^{t_1} \cdot \dots \cdot (X^2 + b_m X + c_m)^{t_m},$$

где $\beta_1, \dots, \beta_s, b_1, \dots, b_m, c_1, \dots, c_m, a_n$ – действительные числа, $k_1, \dots, k_s, t_1, \dots, t_m$ – натуральные числа, $k_1 + \dots + k_s + 2t_1 + \dots + 2t_m = \text{grad } P(X)$, и все трехчлены не имеют действительных корней.



Задание с решением

Разложим многочлен $P(X) = X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 2X + 1$ на неприводимые над $\mathbb{R}$ множители.

Решение:

Подстановкой выявляем, что $\alpha = 1$ является корнем как многочлена $P(X)$, так и частного $C(X)$ ($P(X) = (X - 1) \cdot C(X)$).

Разделив $P(X)$ на $(X - 1)^2$, получаем $P(X) = (X - 1)^2(X^2 + 1)$. Множители $X - 1$ и $X^2 + 1$ являются неприводимыми над $\mathbb{R}$.

Для выполнения операций над алгебраическими дробями (и не только) полезно понятие наименьшего общего кратного (НОК) двух или более многочленов.



определение

Многочлен $M(X)$ называется **наименьшим общим кратным (НОК)** многочленов $P(X)$ и $Q(X)$, если выполняются условия:

- (i) $M(X)$ является общим кратным многочленов ($P(X) \mid M(X)$ и $Q(X) \mid M(X)$);
- (ii) $M(X)$ является делителем любого общего кратного многочленов $P(X)$ и $Q(X)$.

О Запомните!

Наименьшее общее кратное многочленов $P(X)$ и $Q(X)$ можно найти, используя их разложение на неприводимые множители.

Наименьшее общее кратное (НОК) многочленов $P(X)$ и $Q(X)$ можно определить как **произведение** всех неприводимых множителей (над $\mathbb{R}$), которые присутствуют в этих разложениях, при этом взятых с наибольшим показателем степени, если соответствующие множители содержатся в обоих разложениях. НОК определяется с точностью до числового множителя.

Пример

Пусть $P(X) = (X + 1)^2(2X + 3)(X^2 + X + 1)$, $Q(X) = (X + 1)^3(X^2 + X + 1)$ – многочлены, разложенные на неприводимые множители над $\mathbb{R}$. Тогда $M(X) = (X + 1)^3(2X + 3)(X^2 + X + 1)$ – НОК многочленов $P(X)$, $Q(X)$.

Упражнения и задачи



Реальный профиль

A₁

- Определите, является ли α корнем многочлена $P(X)$, где:
 - $P(X) = X^5 + 2X^4 + 2X^3 + 7X^2 + 7X + 2$, $\alpha = -2$;
 - $P(X) = X^7 - 3X^6 + 2X^5 - 3X^4 - 14X^3 + 15X^2 - X + 3$, $\alpha = 3$.
- Зная, что $P(\alpha) = 0$, найдите корни многочлена $P(X)$, если:
 - $P(X) = X^3 - 2X^2 - X + 2$, $\alpha = 1$;
 - $P(X) = X^3 + 5X^2 + 5X + 4$, $\alpha = -4$;
 - $P(X) = X^3 - 21X^2 - 73X + 24$, $\alpha = 24$.
- Разложите на неприводимые над $\mathbb{R}$ множители многочлен:
 - $X^3 - 1$;
 - $X^4 - 16$;
 - $X^4 - 3X^2 - 4$;
 - *) $X^4 - 10X^2 + 1$.
- Найдите кратность корня α для многочлена $P(X)$, если:
 - $P(X) = X^5 - 3X^4 + 4X^3 - 4X^2 + 3X - 1$, $\alpha = 1$;
 - $P(X) = X^5 - 2X^4 - 5X^3 + 10X^2 + 4X - 8$, $\alpha = 2$.

В₁

5*. Найдите НОК многочленов $P(X)$, $Q(X)$, если:

а) $P(X) = (X-1)^3(X+2)^4(X+1)(X+3)^3$, $Q(X) = (X+2)^3(X+3)^4(X+4)(X-5)$;

б) $P(X) = (X^2+1)^2(X^2-1)^4(X+3)^3$, $2Q(X) = (X+1)^3(X^2+1)(X-1)^5$;

в) $P(X) = (X^4-1)^2(X^3-1)(X-3)^2$, $Q(X) = (X^2-9)^3(X^2+X+1)(X-1)^3$.

6. Найдите кратность корня α для многочлена $P(X)$, если:

а) $P(X) = X^3 - 4X^2 - 3X + 18$, $\alpha = 3$;

б) $P(X) = X^4 + 2X^3 - 12X^2 - 40X - 32$, $\alpha = -2$.

7. Найдите действительные корни и разложите многочлен на неприводимые над $\mathbb{R}$ множители:

а) $X^4 - 2X^3 + 4X^2 - 2X + 3$; б) $X^4 + 2X^3 + 8X^2 + 2X + 7$;

в) $X^4 - 2X^3 + 4X^2 + 2X - 5$; г) $X^4 + X^3 - X - 1$.

С₁

8. Определите числа $a, b, c \in \mathbb{R}$, являющиеся корнями многочлена $X^3 - aX^2 + bX - c$.

9. Покажите, что 1 является двойным корнем многочлена $X^{3n} - nX^{n+2} + nX^{n-1} - 1$, $n \geq 2$.

10*. Покажите, что $P(X)$ делится на $Q(X)$, если:

а) $P(X) = X^{n+1} - (n+1)X + n$, $Q(X) = (X-1)^2$; б) $P(X) = (2n-1)X^{2n} + 2nX^{2n-1} + 1$, $Q(X) = (X+1)^2$.

11*. Покажите, что если $n \geq 3$, то многочлен $X^n - (n-1)X^2 + (n-2)X$ делится на $(X-1)^2$, но не делится на $(X-1)^3$.

12. (🎓 2024) Найдите действительные значения a и b , при которых $x = 2$ является двойным корнем многочлена $P(X) = X^4 - 2X^3 + aX + b$.

13. Имеется прямоугольная металлическая пластина длиной 10 дм и шириной 8 дм. Из каждого угла этой пластины вырезан квадрат со стороной x дм. Из оставшейся пластины изготавливается открытый ящик высотой x дм. Определите значение x , при котором объем ящика равен 24 дм³.

§ 5 Алгебраические дроби



определение

Отношение $\frac{P}{Q}$ многочленов $P, Q, Q \neq 0$, называется **алгебраической дробью**, или **рациональной дробью**.

Запомните!

Область допустимых значений (ОДЗ) алгебраической дроби от одной переменной является множество всех действительных чисел, при которых знаменатель дроби отличен от нуля.



Задание с решением

Найдем ОДЗ алгебраической дроби: $\frac{P(X)}{Q(X)} = \frac{X(1-X^2)}{(X+1)(X-4X^3)}$.

Решение:

Решим уравнение, соответствующее многочлену $Q(X)$: $(x+1)(x-4x^3) = 0$.

Получаем множество решений $S = \{-1; -0,5; 0; 0,5\}$. Значит, ОДЗ дроби является множество $\mathbb{R} \setminus S$.

С алгебраическими дробями выполняются ряд операций.

• Сокращение дробей

Запомните!

Для сокращения дробей необходимо разложить ее знаменатель и числитель на произведение неприводимых множителей (над $\mathbb{R}$), затем сократить полученную дробь аналогично обыкновенным дробям.

Пример

Дробь из примера, решенного выше, сокращается следующим образом:

$$\frac{P(X)}{Q(X)} = \frac{X(1-X)(1+X)}{(X+1)X(1-2X)(1+2X)} = \frac{1-X}{1-4X^2}.$$

○ Запомните!

• Основное свойство дроби

При умножении (делении) числителя и знаменателя алгебраической дроби на один и тот же многочлен степени большей или равной 1 получаем новую алгебраическую дробь, равную исходной.

Применяя основное свойство дроби, при сокращении алгебраической дроби может измениться ее ОДЗ.

○ определения

• Алгебраическая дробь, которую можно сократить, называется **сократимой**, а которую невозможно сократить – **несократимой**.

• Две алгебраические дроби $\frac{P_1(X)}{Q_1(X)}$ и $\frac{P_2(X)}{Q_2(X)}$ считаются **равными** (на ОДЗ обеих алгебраических дробей), если в равенстве $\frac{P_1(X)}{Q_1(X)} = \frac{P_2(X)}{Q_2(X)}$ произведение крайних членов пропорции равно произведению ее средних членов:

$$P_1(X) \cdot Q_2(X) = P_2(X) \cdot Q_1(X).$$

○ Запомните!

• Сложение (вычитание) алгебраических дробей

Результатом **сложения (вычитания)** двух алгебраических дробей с одинаковыми знаменателями является алгебраическая дробь, знаменатель которой равен знаменателю исходных дробей, а ее числитель равен алгебраической сумме (разности) числителей исходных дробей. Чтобы сложить (вычесть) на общей ОДЗ две алгебраические дроби с различными знаменателями, надо привести дроби к общему знаменателю, затем сложить результаты, соблюдая правило сложения (вычитания) дробей с равными знаменателями.

Как правило, в дроби, полученной в результате сложения, выполняются сокращения до тех пор, пока не получится несократимая дробь.

Пример

Найдем сумму $S = \frac{3}{X^2 - 3X} + \frac{1}{X} + \frac{1}{X - 3}$.

Решение:

Общей ОДЗ является множество $\mathbb{R} \setminus \{0; 3\}$. На этой ОДЗ имеем:

$$S = \frac{3}{X^2 - 3X} + \frac{X - 3}{X(X - 3)} + \frac{X}{X(X - 3)} = \frac{3 + X - 3 + X}{X(X - 3)} = \frac{2X}{X(X - 3)} = \frac{2}{X - 3}.$$

○ Запомните!

• Операции **умножения, деления и возведения в степень** с целым показателем алгебраических дробей выполняются по тем же правилам, что и умножение, деление, возведение в степень с целым показателем обыкновенных дробей.

Эти операции выполняются над общим ОДЗ и, как правило, в полученной дроби производятся все возможные упрощения, поэтому ОДЗ полученного выражения может отличаться от исходного.

Пример

Выполним действия: а) $\frac{X^3 - 2\sqrt{2}}{X^2 - \sqrt{3}X + 3} \cdot \frac{X^2 + \sqrt{2}X + 2}{X^3 + 3\sqrt{3}}$; б) $\left(\frac{X - 1}{X^2}\right)^{-3}$.

Решение:

а) Общей ОДЗ является множество $\mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{3}\}$.

$$\begin{aligned} \text{Имеем: } & \frac{X^3 - 2\sqrt{2}}{X^2 - \sqrt{3}X + 3} \cdot \frac{X^2 + \sqrt{2}X + 2}{X^3 + 3\sqrt{3}} = \frac{X^3 - (\sqrt{2})^3}{X^2 - \sqrt{3}X + 3} \cdot \frac{X^3 + (\sqrt{3})^3}{X^2 + \sqrt{2}X + 2} = \\ & = \frac{(X - \sqrt{2})(X^2 + \sqrt{2}X + 2)(X + \sqrt{3})(X^2 - \sqrt{3}X + 3)}{(X^2 - \sqrt{3}X + 3)(X^2 + \sqrt{2}X + 2)} = (X - \sqrt{2})(X + \sqrt{3}). \end{aligned}$$

ОДЗ частного является множество $\mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{3}\}$, хотя ОДЗ полученного результата есть $\mathbb{R}$.

б) ОДЗ: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Согласно свойствам возведения в степень получим:

$$\left(\frac{X-1}{X^2}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{X-1}{X^2}\right)^3} = \frac{(X^2)^3}{(X-1)^3} = \frac{X^6}{(X-1)^3}.$$

Для полученного результата имеем другое ОДЗ: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Упражнения и задачи



Реальный профиль

A₁

- Найдите общее ОДЗ для пар алгебраических дробей:
 - $\frac{X+5}{4}$ и $\frac{X-6}{2}$;
 - $\frac{1}{X-3}$ и $\frac{X}{X+3}$;
 - $\frac{X-4}{3X+6}$ и $\frac{3X-1}{X^2+2X}$.
- Запишите каждую сумму двух алгебраических дробей (задание 1) в виде несократимой дроби.
- Найдите ОДЗ несократимых дробей, полученных в задании 2.
- Найдите значение дроби, полученной в результате сложения дробей из задания 1 в) для:
 - $X = -1$;
 - $X = 0,25$;
 - $X = 2$.

B₁

- Выполните на ОДЗ действия:
 - $\frac{X+3}{X^2+2X} + \frac{X-3}{4-X^2}$;
 - $\frac{(X+4)^2}{X^2+4X} + \frac{(X-4)^2}{X^2-4X}$;
 - $\frac{3-X^2}{9-X^2} + \frac{X+3}{X-3}$;
 - $\frac{-125}{X^2-5X} + \frac{X^2}{X-5}$;
 - $\frac{X^3}{X^2-64} - \frac{X}{X-8} + \frac{2}{X+8}$;
 - $\left(\frac{1}{X-1}\right)^{-1} + \frac{X}{X+1} - \frac{X+2}{X^2-1}$.
- Запишите в виде несократимой алгебраической дроби на ОДЗ:
 - $\frac{2X-6}{X^2} \cdot \frac{X^3}{X-3}$;
 - $\frac{\sqrt{3}X^2}{2X-2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}X-2}{3X^3}$;
 - $\frac{X^2-100}{2X^5} \cdot \frac{-X^2}{X-10}$;
 - $(X^2-4) \cdot \frac{(X+2)^2}{X-2}$;
 - $\frac{(Y-5)^2}{3Y+18} \cdot \frac{3Y^2-75}{Y^2-36}$;
 - $\left(\frac{X^2-4}{X}\right)^{-2} \cdot \frac{X^2+1}{X-2}$.

C₁

- Упростите на ОДЗ:
 - $\left(X - \frac{3}{X-1}\right) \cdot \left(\frac{2(1-X)}{6+2X-2X^2}\right)$;
 - $(X^2-3X+2)X \cdot \left(\frac{3X}{X-2} - \frac{1}{X-1} - \frac{1}{X^2-3X+2}\right)$;
 - $\left(\frac{8X^3+1}{8X^2+1}\right)^{-1} \cdot \frac{4X^2-2X+1}{4X^2-1} \cdot (1-2X)^2$;
 - $\frac{4X^2-1}{8X^3+1} \cdot \left(\frac{4X^2-4X+1}{4X^2-2X+1} \cdot \frac{1}{2X+1}\right)$.
- Дано $E(X) = \frac{X^2+3X+2}{X-2}$.
 - Запишите это выражение в виде $E(X) = aX + b + \frac{c}{X-2}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.
 - Найдите $X \in \mathbb{Z}$, при котором $E(X) \in \mathbb{Z}$.

Упражнения и задачи на повторение



Реальный профиль

A₁

- Найдите произведение $P \cdot Q$: $P(X) = 6X^2 - 3 - 7X^3 - 2X^2 + 3$; $Q(Y) = 7Y^3 - 8 - 6Y^2 + 3Y + 4Y^2 - 7Y^3 + 20$.
- Запишите в стандартном виде сумму, разность и произведение многочленов $P(X)$ и $Q(X)$:
 - $P(X) = 3X^2$; $Q(X) = 2X^2 - 10X + 4$;
 - $P(X) = -X^2 - 1$; $Q(X) = -3X^3 + 6X + 2$.
- Запишите в стандартном виде:
 - $(3X+2)^3$;
 - $(-\sqrt{3}+Y)^3$;
 - $(3Y-1)(9Y^2+3Y+1)$;
 - $(3X+1)(9X^2-3X+1)$.
- Определите, какие из элементов множества $\{-2, -1, 0, 1, 3, 5\}$ являются корнями многочлена:
 - $P(X) = X^3 - 25X$;
 - $P(X) = X^3 - 2X^2 - X - 2$;
 - $P(X) = X^3 - 4X^2 + 3X$.

В₁

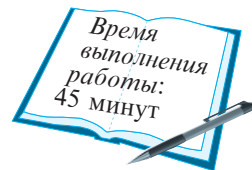
5. Разложите на неприводимые множители многочлен:
 а) $4X^2 + 4XY + Y^2$; б) $Z^2 - Z + 0,25$; в) $9X^2 + 42X + 49$; г) $9X^2 - 6X + 1$.
6. Используя изученные формулы, разложите на неприводимые над $\mathbb{R}$ множители многочлен:
 а) $16Y^2 - 25(Y + 4)^2$; б) $(2X - 9)^2 - 81$; в) $64X^3 + 1$; г*) $Z^6 - 125$.
7. Разложите методом группировки на неприводимые над $\mathbb{R}$ множители многочлен:
 а) $X^2 - 5XY + X - 5Y$; б) $2Y^3 - 4Y^2 + Y - 2$;
 в) $X^3 - YX^2 - 8X + 8Y$; г) $X^3 + X^2 + \sqrt{3}X + \sqrt{3}$.
8. Найдите частное $C(X)$ и остаток $R(X)$ от деления многочлена $P(X)$ на бином $Q(X)$:
 а) $P(X) = X^2 + X - 20$, $Q(X) = X - 4$; б) $P(X) = 6X^3 + X^2 - 29X + 20$, $Q(X) = 2X - 3$;
 в) (ЕГЭ, 2023) $P(X) = X^3 - 2X^2 + 16$, $Q(X) = X^2 - 1$.
9. Используя теорему Безу, найдите остаток от деления многочлена $P(X)$ на бином $Q(X) = X - \alpha$, если:
 а) $P(X) = 2X^3 + 4X + 1$, $\alpha = 1$; б) $P(X) = -3X^4 - 5X^2 + 6X - 21$, $\alpha = -2$.
10. Определите, делит ли многочлен $Q(X)$ многочлен $P(X)$:
 а) $P(X) = X^4 - 64$, $Q(X) = X + 4$; б) $P(X) = 2X^3 - 5X + 1$, $Q(X) = (X - 3)(X + 1)$.
11. Дана алгебраическая дробь $\frac{X^2(1 - X)}{(X + 1)^2(4X - X^3)}$.
 а) Найдите ОДЗ. б) Сократите дробь. в) Найдите значение дроби при $X = \sqrt{2} - 1$.

С₁

12. Найдите значения действительного параметра a , при которых многочлен $Q(X)$ делит многочлен $P(X)$:
 а) $P(X) = 2X^3 - 5X^2 + aX + a$, $Q(X) = X - 3$; б) $P(X) = aX^3 + 3X^2 + (a - 1)X - 2$, $Q(X) = (X - 2)(X + 2)$.
13. Выполните на ОДЗ действия: $\left(\frac{1}{X^2 - 3X} + \frac{1}{X} + \frac{1}{X - 3} \right)^{-3}$.
- 14*. Запишите в стандартном виде многочлен $Q(X)$, корни которого равны обратным значениям корней многочлена $P(X) = 3X^2 + X - 15$.
15.  **Работайте в группах!** Пусть $P(X)$ многочлен с действительными коэффициентами, степень которого не больше 2, такой, что $P(\alpha) = 0$ при $\alpha \in \{1, 2, 3\}$. Докажите, что $P(X)$ является нулевым многочленом.

Итоговый тест

Реальный профиль



1. Дан многочлен $P(X) = 5X^2 - (X^4 - 4X^2 - X) - 1$.
 а) Запишите многочлен в стандартном виде.
 б) Заполните: $\text{grad } P(X) = \square$.
 в) Найдите частное и остаток от деления многочлена $P(X)$ на бином $Q(X) = X - 1$.
 г) Найдите корни многочлена $P(X) - Q(X)$.
 д) Найдите $C(X)$ и $R(X)$ такие, что $P(X) = (X^2 - 1) \cdot C(X) + R(X)$, $\text{grad } R(X) < 2$.
2. Дано выражение $E(X) = \frac{4}{X^2 + 8} - \frac{3}{X^2 + 5}$.
 а) Найдите ОДЗ.
 б) Найдите действительные значения X , при которых $E(X) \neq 0$.
 в) Найдите $E(\alpha)$, если α – положительный корень многочлена $P(X) = X(X^2 - 4)$.
3. Разложите на неприводимые множители многочлен $(XY + 5)^3 + 8X^3$.
4. Покажите, что 1 является двойным корнем многочлена $X^9 - 3X^5 + 3X^2 - 1$.

*Алгебра – это не что иное, как письменная геометрия,
а геометрия – это не что иное, как образная алгебра.*
Мари-Софи Жермен

Цели

- распознавание и применение понятий *функция, график функции* в различных ситуациях;
- определение основных свойств изученных функций и их графиков;
- классификация изученных функций по различным признакам;
- применение свойств функций в реальных и/или смоделированных ситуациях.

§1 Понятие функции. Повторение и дополнения

1.1. Понятие функции. Способы задания функции

В повседневной деятельности иногда возникает необходимость устанавливать связи (ассоциации) между элементами некоторых множеств. Например, пусть A – множество видов продуктов в отделе магазина, B – множество цен для этих продуктов. Если бы мы захотели определить продукт x (из A), зная цену y (из B), возникла бы путаница, поскольку может быть несколько продуктов, которые имеют цену y . Однако, если мы рассмотрим обратное соответствие, зная продукт x из A , чтобы определить цену y из B , то каждому x будет соответствовать единая цена y из B .

В этом случае говорят, что определили **функцию** f от A к B .



определение

Функцией называется упорядоченная тройка (A, B, f) , где A, B – непустые множества, а f – правило (закон), ставящее в соответствие каждому элементу $x \in A$ единственный элемент $y \in B$.

В других терминах **функция** – это **отображение** множества A в множество B : $f: A \rightarrow B$ (рис. 6.1 б)).

Если элементу x ставится в соответствие элемент y , то обозначают $y = f(x)$, и говорят, что y является **образом** x или **значением** функции f в точке x . Множество A называется **областью определения** функции f и обозначается $D(f)$, а множество B называется **областью изменения** функции f . Функция (A, B, f) обозначается также $f: A \rightarrow B$, и в этом случае говорят: „ f определена на множестве A со значениями в множестве B “ или „ f от A к B “. Множество $B_1 = \{y \in B \mid (\exists x \in A) (f(x) = y)\}$ называется **образом множества** A , или **множеством значений** функции f , и обозначается $f(A)$ или $E(f)$, или $\text{Im}f$. Через $f(x_0)$ обозначаем значение функции f в точке x_0 . То есть, $E(f) = \{f(x) \mid x \in A\}$.



замечание

В дальнейшем рассмотрим **числовые функции**, то есть функции, для которых множества A и B являются подмножествами множества $\mathbb{R}$.



определение

Функции $f_1: A_1 \rightarrow B_1$ и $f_2: A_2 \rightarrow B_2$ называют **равными**, если:

- 1) $A_1 = A_2$;
- 2) $B_1 = B_2$;
- 3) $f_1(x) = f_2(x)$ для любого x из A_1 .

Примеры

1. Функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, $f(x) = |x|$, и $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, $g(x) = \sqrt{x^2}$, равны, так как $D(f) = D(g)$, $E(f) = E(g)$ и для любого $x \in \mathbb{R}$ имеем $f(x) = |x| = \sqrt{x^2} = g(x)$.
2. Функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, $f(x) = |x|$, и $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = |x|$, не равны, поскольку различны их области изменения.
3. Очевидно, что у равных функций равны и множества их значений. Множеством значений функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, $f(x) = |x|$, является $\mathbb{R}_+$, поскольку для любого $y \in \mathbb{R}_+$ существует $x \in \mathbb{R}$, а именно $x = \pm y$, такой, что $f(x) = y$. Впрочем, и у функции $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = |x|$, то же множество значений.
4. Соотношение $y = \sqrt{-x^2 - 1}$ не задает функцию: не существует $x \in \mathbb{R}$, для которого можем найти y .

О Запомните!

- Для функции $f: A \rightarrow B$, правило f называется **функциональной зависимостью**. В соотношении $y = f(x)$, где $x \in A$, $y \in B$, переменная x называется **независимой переменной**, или **аргументом функции**, а переменная y – **зависимой переменной**.
- Если из контекста ясно, чему равны множества A , B , то вместо $f: A \rightarrow B$ записывают: „функция f ”.

Если дана функция $f: A \rightarrow B$ и $M \subseteq A$, $K \subseteq B$, то **образом множества M** при отображении f назовем подмножество $f(M) = \{f(x) \mid x \in M\}$ множества B , а **прообразом множества K** назовем подмножество $T = \{x \in A \mid f(x) \in K\}$ множества A .



Задание с решением

Пусть даны функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 3$, и множества $M = [0, 2]$, $K = [3, 7]$. Найдем: а) образ множества M ; б) прообраз множества K .

Решение:

а) Чтобы найти $f(M)$ – образ множества M , учтем, что $0 \leq x \leq 2$, и последовательно получим: $0 \leq x^2 \leq 4$, $3 \leq x^2 + 3 \leq 7$, $3 \leq f(x) \leq 7$. Значит, $f(M) \subseteq [3, 7]$. Верно и обратное включение, $[3, 7] \subseteq f(M)$, так как уравнение $x^2 + 3 = t$, $t \in [3, 7]$, имеет решения на промежутке $[0, 2]$. Следовательно, $f(M) = [3, 7]$.

б) Из двойного неравенства $3 \leq f(x) \leq 7$ получим $|x| \leq 2$, то есть прообразом множества K является множество $T = [-2, 2]$.

О Вспомним

Функцию можно задать:

- 1) **синтетическим способом** – при помощи таблицы, диаграммы, графика, перечислением упорядоченных пар чисел;
- 2) **аналитическим способом** – при помощи выражения (формулы).

Синтетический способ

а)

x	-1	0	3,14	5
$f(x)$	7	1	0	0,3

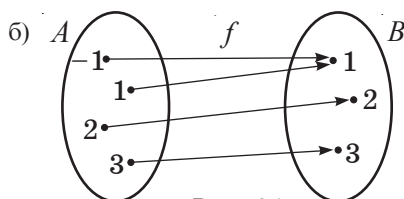


Рис. 6.1

а) При помощи **таблицы** могут быть заданы функции, области определения которых конечны и содержат небольшое количество элементов (рис. 6.1 а)).

б) **Диаграммами** могут быть заданы функции, области определения и изменения которых представлены диаграммами Эйлера–Венна (рис. 6.1 б)).

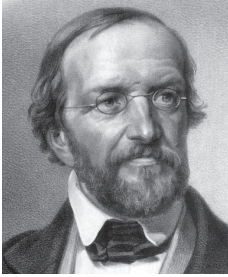
в) В виде **графика**.



Аналитический способ

Чаще всего функция задается аналитически, то есть соответствие между значениями независимой и значениями зависимой переменных задается **формулой, соотношением, свойством**.

Примеры



Иоганн Петер
Густав Лежён
Дирихле (1805–
1859) – немецкий
математик

1. Пусть функция $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, $f(x) = \sqrt{x}$. Значение корня однозначно определено, поэтому однозначно будет определено и значение функции f для любого $x \in \mathbb{R}_+$.
2. Функция „целая часть“. Наибольшее целое число, не превосходящее число a , $a \in \mathbb{R}$, называется **целой частью числа** a и обозначается $[a]$. Например: $[3,1] = 3$, $[-2,1] = -3$, $[2] = 2$, $[\pi] = 3$.
Функция $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$, $g(x) = [x]$, называется **функцией целая часть числа** и обозначается $[]$.
Нетрудно проверить **свойства** функции $[]$:
1° $[x] \leq x$; 2° $[x+m] = [x] + m$, $m \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$.
3. Функция „дробная часть“. Число $a - [a]$, $a \in \mathbb{R}$, называется **дробной частью числа** a и обозначается $\{a\}$. Например: $\{1,01\} = 1,01 - [1,01] = 1,01 - 1 = 0,01$; $\{-2,1\} = -2,1 - [-2,1] = -2,1 - (-3) = 0,9$; $\{\sqrt{2}\} = \sqrt{2} - [\sqrt{2}] = \sqrt{2} - 1$.
Функция $h: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1)$, $h(x) = \{x\}$, называется **функцией дробная часть числа** и обозначается $\{ \}$.
4. Функция Дирихле: $f: \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если число } x \text{ рационально,} \\ 0, & \text{если число } x \text{ иррационально.} \end{cases}$

О Запомните!

Часто допускается задание функции только формулой $y = f(x)$, при определении фактически только функциональной зависимости (которая не зависит от обозначения переменных), а ее область определения ($D(f)$) и множество значений необходимо найти. В этом случае **множество** $D = D(f)$ **считается равным области допустимых значений (ОДЗ)** переменной x в выражении $f(x)$, а множество $E(f)$ считается равным множеству $f(D)$.

Задание
с решением

Найдем множества $D(f)$, $E(f)$ функции f , заданной формулой $f(x) = \sqrt{x-3} + 2$.
Решение:

Множество $D(f)$ совпадает с множеством решений неравенства $x-3 \geq 0$. Значит $D(f) = [3, +\infty)$.

Множество значений аналитически заданной функции f равно множеству действительных значений параметра t , для которых уравнение $f(x) = t$ имеет хотя бы одно решение на множестве $D(f)$. В данном случае это уравнение имеет вид $\sqrt{x-3} + 2 = t$ и на промежутке $[3, +\infty)$ равносильно уравнениям $\sqrt{x-3} = t-2$, $x-3 = (t-2)^2$ для $t-2 \geq 0$. Таким образом, для любого t из $[2, +\infty)$ уравнение $\sqrt{x-3} + 2 = t$ имеет решение, принадлежащее множеству $D(f)$.

Следовательно, $f(D) = E(f) = [2, +\infty)$.

1.2. Операции над функциями



Исследуем

Участники $x_1, x_2, \dots, x_n$ музыкального конкурса оцениваются жюри и отдельно зрителями.



	Жюри				Зрители			
Участники	x_1	x_2	$\dots$	x_n	x_1	x_2	$\dots$	x_n
Баллы	y_1	y_2	$\dots$	y_n	z_1	z_2	$\dots$	z_n

где $y, z \in \{0; 1; \dots; 15\}$.

Окончательные баллы получаются путем сложения баллов, присужденных жюри и зрителями (соответственно).

x_1	x_2	$\dots$	x_n
$y_1 + z_1$	$y_2 + z_2$	$\dots$	$y_n + z_n$

Первая таблица определяет функцию f , вторая – функцию g , третья – функцию h от $A = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ к $B = [0; 30]$. Фактически, значения функции h получаются путем сложения соответствующих значений f и g , поэтому h считается суммой функций f и g и записывается $h = f + g$.

Определение

Суммой, произведением, частным функций $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ и $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ называется функция, заданная соответственно следующим образом:

$$(f + g): A \rightarrow \mathbb{R}, (f + g)(x) = f(x) + g(x);$$

$$(f \cdot g): A \rightarrow \mathbb{R}, (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x);$$

$$\frac{f}{g}: A \rightarrow \mathbb{R}, \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad g(x) \neq 0, \text{ для всех } x \text{ из } A.$$

Задание с решением

Найдем сумму и произведение функций

$$f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, f(x) = \sqrt{x} + 1, \text{ и } g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, g(x) = \sqrt{x} + 2.$$

Решение:

На основании определения, для функций $f + g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f \cdot g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ получим:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{x} + 1 + \sqrt{x} + 2, \quad (f \cdot g)(x) = (\sqrt{x} + 1)\sqrt{x} + 2.$$

Запомните!

Если функции f и g заданы на различных множествах, и необходимо рассмотреть их сумму или произведение, то используется их сужение на множество $D(f) \cap D(g)$.

С целью более широкого применения функций необходимо рассмотреть и некоторые другие операции над ними.

Определение

Пусть функции $f: A \rightarrow B$ и $g: B_1 \rightarrow E$, причем $B \subseteq B_1$. Функция $h: A \rightarrow E$, заданная равенством $h(x) = g(f(x))$, $x \in A$, называется **композицией функций g и f** и обозначается $g \circ f$.

Следующую теорему приведем без доказательства.

Теорема 1

Композиция функций $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ и $h: C \rightarrow D$ ассоциативна:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Задание с решением

Определим, существуют ли композиции $g \circ f$, $f \circ g$, где

$$f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_+, f(x) = \sqrt{x-1}, \quad g: [-2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^2 - 3.$$

Решение:

Так как включение $\mathbb{R} \subseteq [1, +\infty)$ ложно, то не существует композиции $f \circ g$.

Поскольку $\mathbb{R}_+ \subseteq [-2, +\infty)$, то существует композиция $h = g \circ f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ и

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x-1}) = (\sqrt{x-1})^2 - 3 = x - 4.$$

Запомните!

В общем случае, операция композиция функций некоммукативна, то есть $f \circ g \neq g \circ f$.

Особую роль для композиции функций играют так называемые **тождественные функции**: $\varepsilon_M: M \rightarrow M$, $\varepsilon_M(x) = x$, $x \in M$.

Рассмотрим функции $f: A \rightarrow B$, $\varepsilon_A: A \rightarrow A$, $\varepsilon_A(x) = x$, $\varepsilon_B: B \rightarrow B$, $\varepsilon_B(x) = x$. Найдем композиции $\varepsilon_B \circ f: A \rightarrow B$ и $f \circ \varepsilon_A: A \rightarrow B$.

Имеем: $(\varepsilon_B \circ f)(x) = \varepsilon_B(f(x)) = f(x)$, $x \in A$, и $(f \circ \varepsilon_A)(x) = f(\varepsilon_A(x)) = f(x)$, $x \in A$. Значит, у функций $f \circ \varepsilon_A$, $\varepsilon_B \circ f$ и f одна и та же область определения A , одна и та же область изменения B , а также эти функции принимают одинаковые значения для всех значений $x \in A$. Следовательно, эти три функции равны: $f \circ \varepsilon_A = \varepsilon_B \circ f = f$.

Упражнения и задачи



Реальный профиль

A₁1. Найдите область определения функции $f: D \rightarrow \mathbb{R}$:

а) $f(x) = \frac{1}{x+4}$; б) $f(x) = \frac{1}{x^2+4}$; в) $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$.

2. Найдите множество значений функции $f: D \rightarrow \mathbb{R}$:

а) $f(x) = x^2 - 2$; б) $f(x) = x - x^2$; в) $f(x) = \frac{1}{x-1}$.

3. **Исследуйте!** Выясните, равны ли функции:

а) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x$, $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 2x$;

б) $f(x) = \frac{x}{x^2-2x}$, $g(x) = \frac{1}{x-2}$;

в) $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-2}$, $g(x) = \frac{2x-2}{x(x-2)}$.

4. Даны множества $A = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ и функция $f: A \rightarrow B$,

$f(x) = |x| + 1$. Задайте функцию f диаграммой.

B₁5. **Работайте в парах!** Найдите область определения функции $f: D \rightarrow \mathbb{R}$:

а) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$; б) $f(x) = \frac{x-2}{|x|-2}$; в) $f(x) = \frac{1}{\{x\}}$; г) $f(x) = \frac{1}{[x]}$.

6. Найдите область определения и множество значений функции $f: D \rightarrow \mathbb{R}$:

а) $f(x) = [x]$; б) $f(x) = \frac{1}{x-2}$; в) $f(x) = \frac{x-2}{3x+4}$.

7. **Работайте в группах!** Найдите сумму, произведение и композицию $f \circ g$ функций $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

а) $f(x) = |x|$, $g(x) = x - 1$; б) $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$, $g(x) = x^3 + 1$; в) $f(x) = x^3 - 1$, $g(x) = \sqrt[3]{x-1}$.

C₁8. Найдите композиции $f \circ f$, $f \circ f \circ f$, ..., $\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_n$ функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

а) $f(x) = x^2$; б) $f(x) = x - 1$.

9. Представьте в виде композиции двух функций (отличных от тождественных) функцию $\Phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

а) $\Phi(x) = (x^{10} + 1)^{17}$; б) $\Phi(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$.

10*. Даны функции $f: A \rightarrow B$, $g: A \rightarrow C$, $f \neq g$, $M \subseteq A$. Существует ли M , $M \neq \emptyset$, такое, что $f(x) = g(x)$, $\forall x \in M$? Приведите примеры.11. Дана функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x-5}$. Вычислите произведение $P = f(-2024) \cdot \dots \cdot f(0) \cdot \dots \cdot f(2024)$.

§2 Основные свойства числовых функций



Исследуем

Функции представляют собой важный инструмент исследования процессов, экономических, социальных явлений и т. д. Например, при изготовлении двигателя автомобиля необходимо, помимо прочего, определить количество бензина, расходуемого за одну минуту при определенном количестве оборотов (за одну минуту). Итак, будет разработана/построена функция, устанавливающая зависимость между количеством оборотов и количеством израсходованного бензина (за одну минуту). Однако для эффективного использования функций необходимо знать их свойства: монотонность, нули, экстремумы и т. д.



2.1. График функции

Вспомним

Определение

Графиком функции $f: A \rightarrow B$ называется множество $G_f = \{(x; y) \mid x \in A, y = f(x)\}$.

Примеры

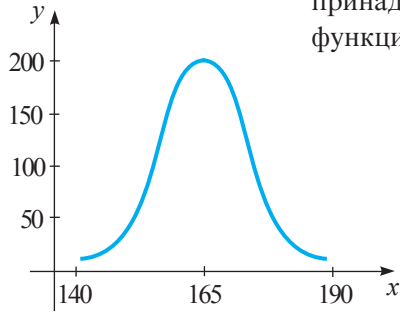


Рис. 6.2

1. Пусть функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$. Поскольку $f(2) = 3$, то точка $A(2, 3)$ принадлежит графику функции, а точка $B(3, 1)$ не принадлежит графику этой функции, так как $f(3) = 5 \neq 1$.

2. По графику функции можно сделать выводы относительно ее вариации. Например, на рисунке 6.2 изображена зависимость количества женщин (объем выборки равен 1375) определенного роста от данного роста x . Нетрудно заметить, что женщин с ростом 140 см немного; при увеличении роста их количество возрастает до тех пор, пока рост достигает 165 см, затем при дальнейшем увеличении роста количество женщин (определенного роста) уменьшается.

2.2. Нули функции

Нуль функции – это число α , для которого $f(\alpha) = 0$.

Важно знать точки, в которых график функции f пересекает ось Ox ; в таких точках функция может поменять свой знак.

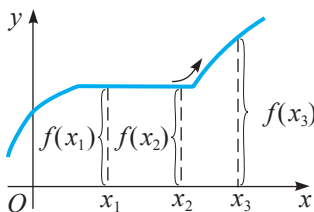
Например, функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$, имеет единственный нуль: $x = \frac{1}{2}$.

2.3. Монотонность функции

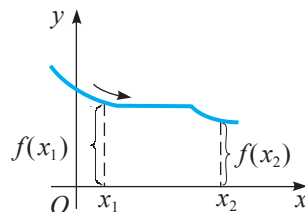
Вспомним

Определения

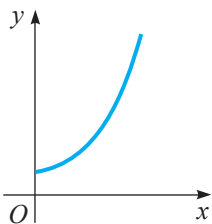
- Функция $f: A \rightarrow B$ называется **возрастающей** (**убывающей**) на множестве I , $I \subseteq A$, если для любых $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in I$, имеем $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$).
- Функция $f: A \rightarrow B$ называется **строго возрастающей** (**строго убывающей**) на множестве I , $I \subseteq A$, если для любых $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in I$, имеем $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).



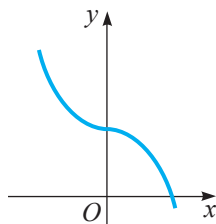
а) График возрастающей функции



б) График убывающей функции



в) График строго возрастающей функции



г) График строго убывающей функции

Рис. 6.3

Возрастающая или убывающая (строго возрастающая или строго убывающая) на некотором множестве функция называется **монотонной** (**строго монотонной**) на этом множестве.

Возрастание (убывание) функции на некотором множестве означает, что большему значению аргумента, принадлежащему этому множеству, соответствует большее или равное (меньшее или равное) значение функции (рис. 6.3).

Геометрически строгое возрастание (убывание) функции на некотором промежутке иллюстрируется следующим образом: при движении по графику функции в положительном направлении оси Ox одновременно осуществляется и движение в положительном (отрицательном) направлении оси Oy , т. е. вверх, см. рисунок 6.3 в) (вниз, см. рисунок 6.3 г)).

Теорема 2

Функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a > 0$ ($a < 0$), строго возрастает (убывает) на промежутке $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$ и строго убывает (возрастает) на промежутке $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$.

2.4. Четность или нечетность функции**Определение**

Функция $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ называется **четной (нечетной)**, если:

- 1) для $x \in D$ имеем $-x \in D$ и
- 2) $f(-x) = f(x)$ ($f(-x) = -f(x)$), для любого $x \in D$.

Примеры

1. Функция $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$, $f(x) = \frac{a}{x}$, $a \in \mathbb{R}^*$, нечетная, поскольку:
 - 1) для $x \in \mathbb{R}^*$ имеем $-x \in \mathbb{R}^*$ и
 - 2) $f(-x) = \frac{a}{-x} = -\frac{a}{x} = -f(x)$ для любого $x \in \mathbb{R}^*$.
2. Функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, $f(x) = x^2 + 3$, четная, так как $f(-x) = (-x)^2 + 3 = x^2 + 3 = f(x)$ для любого $x \in \mathbb{R}$.
3. Функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b \in \mathbb{R}^*$, не является ни четной, ни нечетной, так как $f(-x) = ax^2 - bx + c$ и найдется такое значение x_0 , что $f(-x_0) \neq \pm f(x_0)$ (например, $x_0 = -\frac{b}{2a}$).
4. Функция, заданная формулой $y = \sqrt{x+2}$, не является ни четной, ни нечетной, так как $x = 9$ принадлежит, а $-x = -9$ не принадлежит ее области определения (область определения функции не симметрична относительно начала координат).

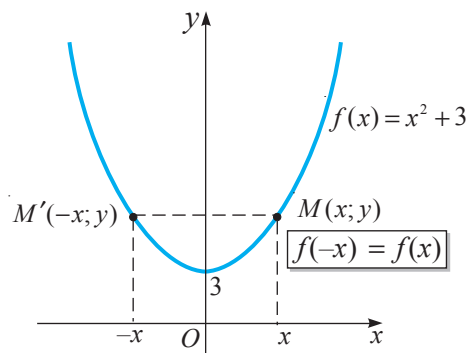
Важно знать геометрическую интерпретацию четной и нечетной функций.

Теорема 3

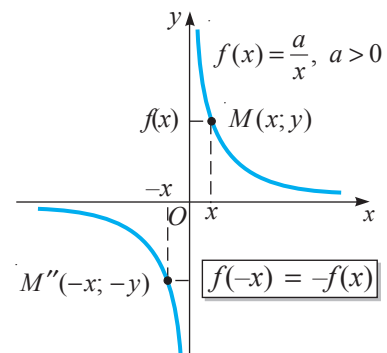
График четной функции симметричен относительно оси ординат, а график нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Доказательство:

Точки $M(x, y)$, $M'(-x, y)$ (симметричные относительно оси Oy) одновременно принадлежат или не принадлежат графику четной функции f , так как $y = f(x) = f(-x)$ (рис. 5.4 а)), а точки $M(x, y)$, $M''(-x, -y)$ (симметричные относительно начала координат) одновременно принадлежат или не принадлежат графику нечетной функции f , так как $y = f(-x) = -f(x)$ (рис. 6.4 б)). ►



а) График четной функции



б) График нечетной функции

Рис. 6.4

**Задание
с решением**

Исследуем на четность функцию:

а) $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$; б) $f: [-4; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.

Решение:

а) $D(f) = \mathbb{R}$. Так как $f(-1) \neq f(1)$, $f(-1) \neq -f(1)$, то условие 2) из определения не выполнено. Значит, функция f не является ни четной, ни нечетной.

б) $D(f) = [-4; +\infty)$. Констатируем, что условие 1) из определения не соблюдается. Например, для $x = 5 \in D(f)$, $-x = -5 \notin D(f)$. Значит, функция f не является ни четной, ни нечетной.

О Запомните!

1. Достаточно изучить поведение четных и нечетных функций только на той части области определения, которая находится на положительной полуоси Ox .
2. Любая функция $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, для которой область определения ($D(f) = D$) симметрична относительно начала координат, может быть представлена в виде $f = h_1 + h_2$, где h_1 – четная функция, а h_2 – нечетная.

Действительно, этими функциями являются:

$$h_1, h_2: D(f) \rightarrow \mathbb{R}, \quad h_1(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)), \quad h_2(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)).$$

**Задание**

Докажите, что h_1 – четная функция, а h_2 – нечетная.

2.5. Периодичность функции

Функция, график которой изображен на рисунке 6.5 характеризуется повторением значений при условии, что значение аргумента изменяется на 1:
 $f(x) = f(x+1) = f(x+2) = \dots = f(x+n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

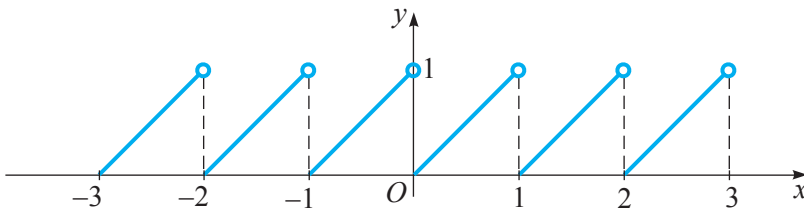
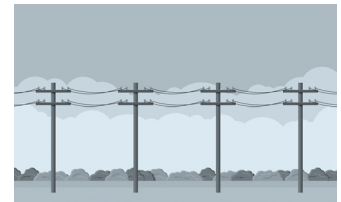


Рис. 6.5



О поведении этой функции на множестве $\mathbb{R}$ можно судить по ее поведению на промежутке длины 1, например, на промежутке $[0, 1)$.

**определение**

Функция $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ называется **периодической**, если существует такое действительное число T , $T \neq 0$, называемое **периодом** функции, что:

- 1) для $x \in D$ имеем $(x \pm T) \in D$;
- 2) $f(x \pm T) = f(x)$ для любого $x \in D$.

**Задание**

Докажите, что если T – период функции f , то числа kT , $k \in \mathbb{Z}^*$, также являются периодами этой функции.

Пример

Рассмотрим функцию $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1)$, $f(x) = \{x\}$, где $\{x\}$ – дробная часть действительного числа x . Любое целое ненулевое число T является периодом этой функции, так как $\{x+T\} = \{x\}$, $x \in \mathbb{R}$.

Действительно, на основании свойств функции $[]$ получаем:

$$f(x+T) = \{x+T\} = x+T - [x+T] = x+T - ([x]+T) = x - [x] = \{x\} = f(x).$$

График этой функции изображен на рисунке 6.5.

Важной задачей для периодических функций является нахождение ее наименьшего положительного периода T_0 , называемого **основным периодом функции**, поскольку при известных значениях такой функции на промежутке вида $[a, a + T_0)$ длины T_0 можно найти ее значения в любой точке множества $D(f)$.

В самом деле, для любого $x \in D(f)$ существует $k \in \mathbb{Z}$, при котором $x + k \cdot T_0 \in [a, a + T_0)$ и $f(x) = f(x + k \cdot T_0)$.

Примеры

1. Основным периодом функции $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1)$, $f(x) = \{x\}$, является $T_0 = 1$. Действительно, любое число T , $0 < T < 1$, не является периодом этой функции, так как существует x , $0 < x < 1$, при котором $0 < x + T < 1$, $x < x + T$. Следовательно, $f(x) < f(x + T)$.
2. Функция $f(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$, не имеет основного периода: любое $T > 0$ является ее периодом.

О Запомните!

1. Достаточно изучить поведение периодической функции только на интервале $D(x)$, имеющего длину периода.
2. Если функция f монотонна на бесконечном (неограниченном) промежутке, то она не является периодической.

2.6. Экстремумы функции

Задача

Фермер получил право на ограждение участка земли прямоугольной формы, граничащего с одной стороны с прямолинейным ирригационным каналом. Он должен оградить участок с трех сторон, причем длина всей изгороди должна быть равна p . Естественно, что фермер хочет оградить участок наибольшей площади. Как найти решение этой задачи?

Решение:

Для решения задачи выразим площадь $\mathcal{A}$ участка через x – длину стороны, параллельной каналу, то есть: $\mathcal{A} = x \cdot \frac{p-x}{2}$, где $\frac{p-x}{2}$ – длина стороны, перпендикулярной каналу. Получили функцию II степени

$\mathcal{A}(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{p}{2}x$, $x \in (0, p)$, графиком которой является парабола (рис. 6.6). Наибольшее значение функции $\mathcal{A}(x)$ достигается в точке с абсциссой $x_0 = \frac{p}{2}$. В

этом случае говорят, что в точке $x_0 = \frac{p}{2}$, $x_0 \in (0, p)$,

функция $\mathcal{A}(x)$ достигает локального максимума. Тогда длина стороны, параллельной каналу, равна $\frac{p}{2}$, длина стороны, перпендикулярной каналу, равна $\frac{p}{4}$, а наибольшая площадь участка земли равна $\frac{p^2}{8}$.

Аналитическим способом также получаем, что максимальное значение площади участка достигается при $x_0 = \frac{p}{2}$, так как для любого x , $0 < x < p$, имеем

$$\mathcal{A}(x) = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{p^2}{8} \leq \frac{p^2}{8}.$$

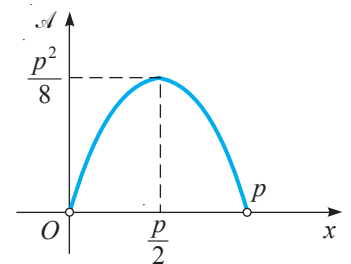


Рис. 6.6

Определение

ε – **окрестностью точки a** называется любой промежуток вида

$$V_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon), \quad \varepsilon > 0.$$

Будем считать промежуток $(-\infty, +\infty)$ окрестностью любой точки $a \in \mathbb{R}$.

Определение

Точка $a \in A$ называется точкой **локального максимума (локального минимума)** функции $f: A \rightarrow B$, если существует окрестность $V_\varepsilon(a)$, что $f(x) \leq f(a)$ ($f(x) \geq f(a)$), для всех $x \in V_\varepsilon(a) \cap A$.

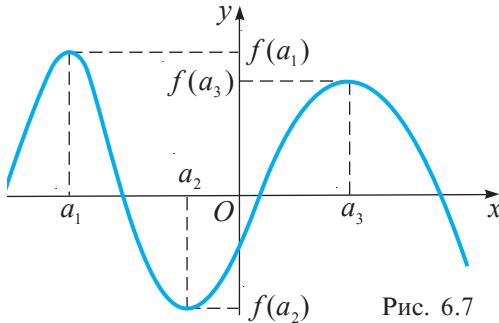


Рис. 6.7

Точки локального максимума (минимума) функции f называются ее **точками локальных экстремумов**.

Если a – точка локального максимума (минимума) функции f , то соответствующее значение $f(a)$ называется **локальным максимумом (минимумом)** этой функции. Локальные максимумы и минимумы функции называются ее **локальными экстремумами**. На рисунке 6.7 точками локального максимума функции f являются a_1 и a_3 , а ее точкой локального минимума является a_2 .

Запомните!

Строго монотонная на некотором промежутке функция не имеет экстремумов на этом промежутке.

2.7. Обратная функция. Обратимые функции

Рассмотрим функции:

$$f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x) = |x|; \quad f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+, f_2(x) = |x|; \quad f_3: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, f_3(x) = |x| = x.$$

На первый взгляд функции f_1, f_2, f_3 мало отличаются, но они имеют существенные различительные свойства.

Для функции f_1 :

а) существуют $x_1 \neq x_2$, такие, что $f_1(x_1) = f_1(x_2)$;

б) существуют элементы из области изменения функции, не имеющие прообразов в $D(f_1)$.

Для функции f_2 : любой элемент из области изменения функции имеет прообраз в $D(f_2)$.

Для функции f_3 : любой элемент из области изменения функции имеет прообраз в $D(f_3)$, и притом только один.

Некоторые функции $f: A \rightarrow B$ обладают важным свойством: каждому элементу $x \in A$ однозначно соответствует элемент $f(x) \in B$, и наоборот, – каждому элементу $y \in B$ соответствует единственный элемент $x \in A$ такой, что $f(x) = y$. Такой функцией, например, является функция f_3 .

Значит, можно задать функцию $g: B \rightarrow A$:

$$g(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y, \quad y \in B, \quad x \in A. \quad (1)$$

Таким образом, если функция f „прокладывает пути“ от множества A к множеству B , то функция g „прокладывает пути“ от B к A , обратные проложенным функцией f . Если A и B – конечные множества, то соотношение (1) может быть изображено диаграммами (рис. 6.8).

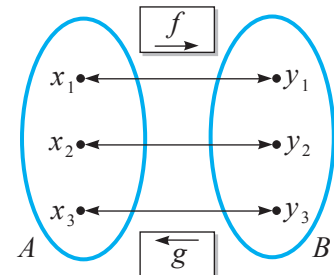


Рис. 6.8

Определение

Функция $g: B \rightarrow A$ называется **обратной функцией** к функции $f: A \rightarrow B$, если $g(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y, \quad y \in B, \quad x \in A$.

Обратная функция к функции f обозначается f^{-1} . Очевидно, что f является обратной функцией к f^{-1} , то есть $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$. Функции f и f^{-1} называются **взаимно обратными функциями**. (Не путать f^{-1} с $\frac{1}{f}$!)

**Определение**

Функция, обладающая обратной, называется **обратимой функцией**.

Например, функция, которая ставит в соответствие множество людей и их фамилии, не обратима (Обоснуйте!), а функция, которая ставит в соответствие множество людей и их ИНН/IDNP, – обратима (Обоснуйте!).

Рассмотрев композицию функций $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow A$ и учитывая равносильность (1), получим:

$$\begin{cases} (f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(x) = y, & y \in B; \\ (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = x, & x \in A. \end{cases} \quad (2)$$

Пользуясь тождественными функциями $\varepsilon_A, \varepsilon_B$ множеств A и B соответственно, соотношения (2) принимают вид: $f \circ g = \varepsilon_B$, $g \circ f = \varepsilon_A$.

В следствие этого, функция g (обозначенная f^{-1}) является обратной к функции f и соответственно функция f (обозначенная g^{-1}) является обратной к функции g .

Если функция $f: A \rightarrow B$ задана формулой, то ее обратимость, а также обратная к ней функция могут быть определены, учитывая равносильность (1), следующим образом:

- 1) из соотношения $y = f(x)$, $x \in A$, $y \in B$, переменная x выражается через y , и получаем $x = g(y)$;
- 2) если это соотношение обеспечивает однозначное выражение переменной x через y , то функция f обратима;
- 3) поменяв x на y и y на x в формуле $x = g(y)$ (для сохранения принятых обозначений), получим формулу $y = g(x)$, задающую обратную функцию $g: B \rightarrow A$ к функции f .

Найдем обратную к функции $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$, $f(x) = \sqrt{x-1}$.

Решение:

Для нахождения обратной функции $f^{-1}: \mathbb{R}_+ \rightarrow [1, +\infty)$ из равенства $y = \sqrt{x-1}$ выражаем переменную x через y и получаем $x = y^2 + 1$. Переменная x выражена однозначно через y . Поменяв x на y и y на x , получаем $y = x^2 + 1$, то есть $f^{-1}(x) = x^2 + 1$. Значит, $f^{-1}: \mathbb{R}_+ \rightarrow [1, +\infty)$, $f^{-1}(x) = x^2 + 1$, – это обратная к функции f .

**Задание с решением****О Запомните!**

Основные свойства взаимно обратных функций $f: A \rightarrow B$ и $f^{-1}: B \rightarrow A$

- 1° Обратная функция (если она существует) единственна.
- 2° $D(f) = E(f^{-1}) = A$, $D(f^{-1}) = E(f) = B$.
- 3° Графики функций f и f^{-1} симметричны относительно прямой, заданной уравнением $y = x$.
- 4° Обе функции f и f^{-1} либо строго возрастающие, либо строго убывающие.

Пример

На рисунке 6.9 изображены графики взаимно обратных функций

$$f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad f(x) = \sqrt{x-1}, \quad \text{и}$$

$$f^{-1}: \mathbb{R}_+ \rightarrow [1, +\infty), \quad f^{-1}(x) = x^2 + 1.$$

Эти графики симметричны относительно прямой, заданной уравнением $y = x$.

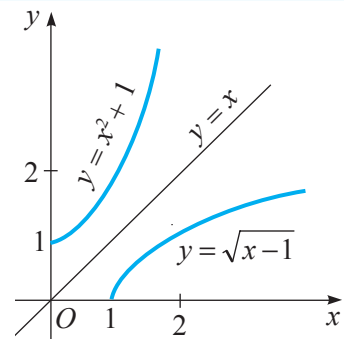


Рис. 6.9

2.8. Ограниченные функции



Определения

- Функция $f: A \rightarrow B$ называется **ограниченной снизу (ограниченной сверху)**, если существует такое действительное число m (M), называемое **минорантом (мажорантом)**, что для любого $x \in A$ выполнимо неравенство $m \leq f(x)$ ($f(x) \leq M$).
- Функция, ограниченная снизу и сверху, называется **ограниченной функцией**.



Задание с решением

Докажем, что функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a > 0$, ограничена снизу, но не ограничена сверху.

Решение:

$$f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}. \text{ Тогда } f(x) \geq -\frac{b^2 - 4ac}{4a}, \text{ так как } a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \geq 0 \text{ для}$$

всех $x \in \mathbb{R}$. Значит, функция f ограничена снизу числом $m = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$.

Для доказательства утверждения, что функция f не ограничена сверху, рассмотрим уравнение $f(x) = t$ с параметром $t \geq m$: $f(x) = t \Leftrightarrow a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = t - m$.

Последнее уравнение имеет решения, так как правая часть принимает неотрицательные значения (для сколь угодно больших значений t). Таким образом, функция f может принимать сколь угодно большие значения, то есть она не ограничена сверху.

Упражнения и задачи



Реальный профиль

A₁

1. Исследуйте на четность и найдите промежутки монотонности функции $f: D \rightarrow \mathbb{R}$:

а) $f(x) = 2x - 3$; б) $f(x) = -\frac{5}{x}$; в) $f(x) = |x|$.

2. 1) Найдите точки локальных экстремумов и локальные экстремумы функции:

а) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x$; б) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -|x|$.

2) Докажите, что функция $f(x) = -|x|$ ограничена сверху.

3. Найдите нули функций из заданий 1 и 2.

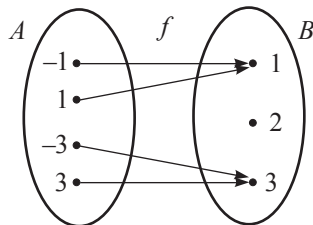


Работайте в парах! Найдите область определения функции:

а) $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x+2}$; б) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}} + \sqrt{2-x}$; в) $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{2-x}$.



Исследуйте! Дана функция:



Выявите правило, ставящее в соответствие каждому элементу множества A единственный элемент из множества B , и задайте функцию f аналитически.

B₁

6. Даны функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2$; $g: [-5; 10] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^3$; $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = x^3 + 1$;

$f_1: (0; +\infty] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_1(x) = x^4 - x^2$; $f_2: (-3; 8] \rightarrow \mathbb{N}$, $f_2(x) = -3x^5$.

Определите, какие из них четные, какие – нечетные, и какие – ни четные, ни нечетные.

7. 1) Найдите промежутки монотонности функции $f: D \rightarrow \mathbb{R}$:

а) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$; б) $f(x) = \{x\}$; в) $f(x) = |x^2 - 4x - 5|$.

2) Покажите, что функции в а) и б) ограничены.

8. Дана функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$. Докажите, что $(f \circ f \circ f)(x) = 8x + 7$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

9. Функция $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ положительна и возрастает на множестве D ($f(x) > 0, x \in D$). Докажите, что функция:
- а) f^2 возрастает на множестве D ; б) $\sqrt{f}$ возрастает на множестве D ; в) $\frac{1}{f}$ убывает на множестве D .
10. Найдите локальные экстремумы функции: а) $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, 1], f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$; б) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+, f(x) = |x^2 - x|$.
11.  **Исследуйте!** Выясните, какие из следующих функций $f_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, i = \overline{1, 4}, f_1(x) = [x], f_2(x) = \{x\}, f_3(x) = \left\lfloor \frac{1}{2}x \right\rfloor, f_4(x) = \{5x\}$, периодические. Найдите основные периоды периодических функций.
12. Исследуйте на четность или нечетность функцию $f: D \rightarrow E$ ($D = D(f)$):
- а) $f(x) = x^3 + 2x$; б) $f(x) = \frac{x+1}{x-1} + \frac{x-1}{x+1}$; в) $f(x) = x^2 + x + 1$.

C₁

13. Докажите, что если $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – периодическая функция, а $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – произвольная функция, то композиция $g \circ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ является периодической функцией. Верно ли это и для функции $f \circ g$? Приведите примеры.
- 14*. Представьте в виде суммы двух функций, одна из которых – четная, а другая – нечетная, функцию $f: D(f) \rightarrow \mathbb{R}$:
- а) $f(x) = 2x^2 - x + 3$; б) $f(x) = x - 2$.
15. Докажите, что функция f обратима, и найдите обратную к ней функцию:
- а) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1$; б) $f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}, f(x) = \frac{x}{x-2}$.
16. Пусть y – время, а x – скорость, с которой автомобиль движется по шоссе длиной 300 км. Является ли переменная y функцией переменной x ? Определите и аргументируйте ее монотонность.
17. Дана функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x - 3$, и обратная к ней функция $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Найдите $g(2) + g(-1)$.
18. Функции $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ являются возрастающими на множестве D . Какие из следующих функций $f + g, f - g, f + f, -f, f^3, f^2, g \circ f$ определенных на множестве D со значениями в множестве $\mathbb{R}$, монотонны на множестве D . Приведите примеры.

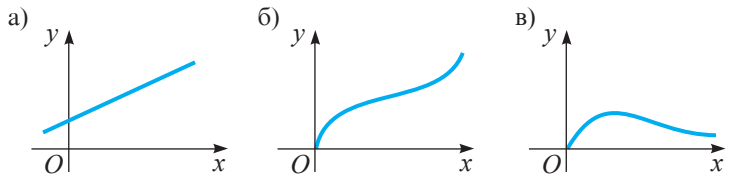
Упражнения и задачи на повторение



Реальный профиль

A₁

1. Найдите $D(f), E(f)$ для функции f , заданной аналитически:
- а) $f(x) = 0,5x - 3$; б) $f(x) = \frac{1}{x} + 3$; в) $f(x) = x^2 - 3x$.
2.  **Исследуйте!** Для функций f из задания 1, применив при необходимости графики, найдите промежутки (максимально возможные) их возрастания, убывания.
3.  **Работайте в паре!** Пусть y – объем потребленной предприятием электроэнергии с начала года, x – прошедшее с начала года время. На каком из рисунков может быть изображена зависимость y от x ?

B₁

4. Найдите промежутки знакопостоянства функции $f: D \rightarrow \mathbb{R}$:
- а) $f(x) = 3 - \frac{2-x}{3+x}$; б) $f(x) = 2 - \frac{2+x}{4-x}$; в) $f(x) = 6 - \frac{x-2}{4+x}$.
5. Найдите локальные экстремумы функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:
- а) $f(x) = -x^2 + 2x$; б) $f(x) = 3x + x^2$; в) $f(x) = x^2 + 6x$.

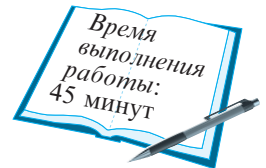
6.  **Работайте в группах!** Даны функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 3 - x$. Найдите сумму, разность, произведение и композиции $f \circ g$, $g \circ f$ этих функций.
7. 1) Исследуйте на четность или нечетность функцию $f: D \rightarrow \mathbb{R}$:
- а) $f(x) = \frac{1}{x}$; б) $f(x) = x^2 + x$; в) $f(x) = x^5 + 2x$.
- 2) Докажите, что $f(x) = x^2 + x$ ограничена сверху, но не ограничена снизу.
8. Два автомобиля одновременно выезжают из города и продолжают движение в одном направлении. Расстояния, на которых они находятся от здания мэрии, рассчитываются по формулам $S_1 = 60x + 31$ и $S_2 = 90x + 1$ соответственно, x – время, в течение которого они находятся в движении. Через сколько часов с начала движения автомобили будут находиться на одинаковом расстоянии от пункта отправления?
9. Сумма, которую необходимо вернуть по кредиту в зависимости от количества x дней после оформления кредита, рассчитывается по формуле $S = 1575 - 25x$. Через сколько дней будет выплачен кредит?
10. Предприниматель предоставил кредит в размере 1600 у.е., при этом клиент обязуется погашать 25 у.е. ежемесячно. Задайте функцию f , которая описывает сумму, оставшуюся к оплате через x месяцев с момента заключения договора, и функцию g , которая описывает сумму, возмещаемую клиентом по истечении этих x месяцев. Какая из этих двух функций является возрастающей/убывающей?

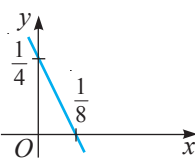
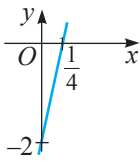
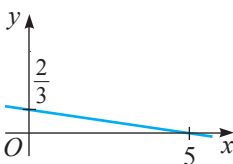
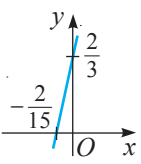
C₁

11. Представьте в виде композиции двух функций (отличных от тождественных) функцию $\Phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:
- а) $\Phi(x) = (x^7 + 2)^{\frac{3}{2}}$; б) $\Phi(x) = \frac{1}{x^4 + 3x^2 + 1}$.
12. Пусть A – множество треугольников, вписанных в круг радиуса 5, одна из сторон которого является диаметром окружности. Функция $f: A \rightarrow (0, 25]$ ставит в соответствие каждому треугольнику его площадь. Определите, обратима ли функция f .
13. Докажите, что график функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 4x + 5$ расположен выше прямой $y = 1$.
14.  **Работайте в группах! Проект STREAM.** Применение функций в произведениях искусства и архитектуры

ИТоговый тест

Реальный профиль



1. Укажите верный ответ.
Областью определения функции $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x-2} + \sqrt{x-1}$, является множество
А $(0, 1) \cup (1, 2)$. В $[0, 1]$. С $[1, 2) \cup (2, +\infty)$. D $[1, 2]$.
2. Функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x - 1|$, строго монотонна на некоторых из промежутков $[1, +\infty)$, $[0, +\infty)$, $(-\infty, +\infty)$, $(-\infty, 1]$. Найдите максимально возможный промежуток монотонности.
3. а) Какие из точек $0, -1, 1, -2, \frac{1}{2}$ являются точками локального экстремума для функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x^2 + 2x|$.
б) Найдите соответствующие им локальные экстремумы.
4. Найдите нули функции $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x-4}{x-2} + 4 - x$.
5. Эскизом графика функции $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -2x + \frac{1}{4}$, является:
- а)  б)  в)  г) 
6. а) Представьте функцию $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = 2x + 4$, как композицию двух функций:
 $f_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = \overline{1, 4}$, $f_1(x) = 2x$, $f_2(x) = x + 4$, $f_3(x) = x + 5$, $f_4(x) = \sqrt{x}$.
б) Какая из этих функций нечетная?
в) Какая из этих функций ограничена сверху/снизу?

Математика представляет собой собрание выводов, которые могут быть применены к чему угодно.

Бертран Рассел

Цели

- распознавание изученных функций, уравнений, неравенств, систем, совокупностей в различных контекстах;
- применение изученных функций и их свойств в решении задач из разных областей;
- классификация уравнений, неравенств, систем, совокупностей по различным критериям;
- решение уравнений, неравенств, систем, совокупностей адекватными методами;
- моделирование повседневных ситуаций и/или ситуаций из разных областей с помощью изученных функций, уравнений, неравенств, систем, совокупностей.

§1 Функция I степени. Уравнения I степени. Неравенства I степени

1.1. Функция I степени

○ Вспомним



определения

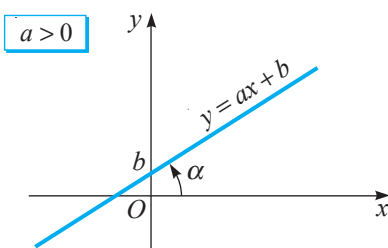
- **Функцией I степени** называется функция вида $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.
- Число a называется **угловым коэффициентом** графика функции f .



Исследуем

Используя график функции I степени (рис. 7.1), сформулируйте свойства функции I степени.

а)



б)

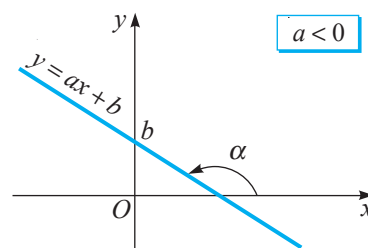


Рис. 7.1

○ Вспомним



определения

- Функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax$, где $a \in \mathbb{R}^*$, называется **прямой пропорциональностью**.
- Число a называется **коэффициентом пропорциональности**, или **угловым коэффициентом** графика функции f .

○ **Запомните!**

Прямая пропорциональность является частным случаем функции I степени: $b = 0$.

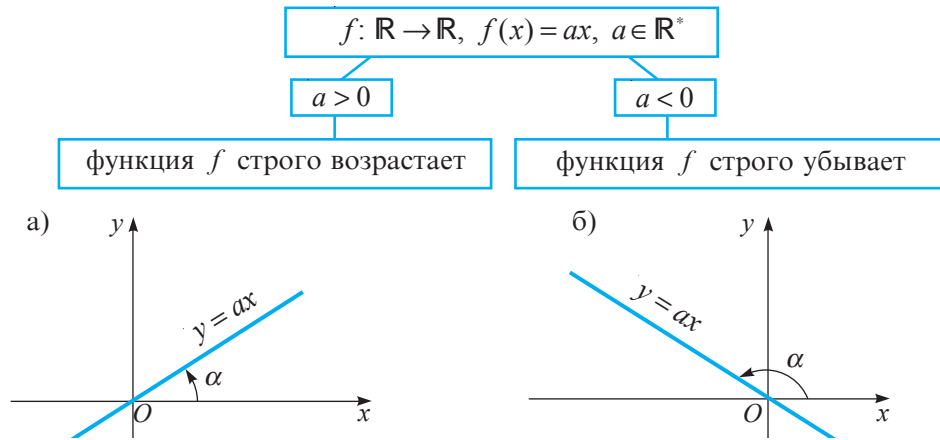


Рис. 7.2

1.2. Уравнения I степени. Системы. Совокупности

○ **Вспомним**

1 Понятие уравнения

○ **определение**

- **Уравнением с одним неизвестным x** называется равенство вида $A(x) = B(x)$, где $A(x), B(x)$ – выражения с переменной.
- **Решением уравнения с одним неизвестным** называется значение неизвестного, при подстановке которого в уравнение получается верное числовое равенство.
- Множество значений неизвестного (неизвестных), при которых определены все выражения уравнения, называется **областью допустимых значений (ОДЗ)** этого уравнения.

Как правило, числовое множество, которому должны принадлежать решения уравнения, уточняется исходными условиями (в большинстве случаев этим множеством является ОДЗ).

Решить уравнение – значит найти все его решения (на указанном множестве). Обозначим через S множество решений уравнения.

3 **замечание**

Решениями уравнения могут быть только те значения неизвестного (неизвестных), которые принадлежат ОДЗ этого уравнения.

Уравнение не имеет решений, если его ОДЗ – пустое множество.

○ **определение**

Два уравнения называются **равносильными**, если множества их решений равны. Равносильность уравнений $A_1(x) = B_1(x)$ и $A_2(x) = B_2(x)$ обозначается символом „ $\Leftrightarrow$ “, то есть: $A_1(x) = B_1(x) \Leftrightarrow A_2(x) = B_2(x)$.

○ **Запомните!**

Как правило, равносильность уравнений рассматривается на ОДЗ исходного уравнения. В частности, уравнения, не имеющие решений, являются равносильными.

○ **определение**

Пусть даны уравнения $A_1(x) = B_1(x)$ и $A_2(x) = B_2(x)$. Второе уравнение $A_2(x) = B_2(x)$ называется **следствием** первого уравнения $A_1(x) = B_1(x)$, если каждое решение первого уравнения является решением и второго уравнения.

Это обозначается: $A_1(x) = B_1(x) \Rightarrow A_2(x) = B_2(x)$.

2 Понятие системы уравнений

Пусть даны уравнения с двумя неизвестными $E_1(x, y) = 0$, $E_2(x, y) = 0$. Ставится задача об отыскании их общих решений, то есть всех таких упорядоченных пар (a, b) , которые удовлетворяют каждому из заданных уравнений.

В таких случаях говорят, что задана **система из двух уравнений с двумя неизвестными**, которую обозначают следующим образом:
$$\begin{cases} E_1(x, y) = 0, \\ E_2(x, y) = 0. \end{cases}$$

Аналогично трактуются системы из трех, четырех и т. д. уравнений с тремя, четырьмя и т. д. неизвестными. В дальнейшем будем изучать и решать различные типы систем уравнений.

Определение

Решением системы из двух (трех) уравнений с двумя (тремя) неизвестными называется упорядоченная пара (a, b) (тройка (a, b, c)) значений неизвестных, которая удовлетворяет каждому из заданных уравнений, другими словами, которая обращает каждое уравнение системы в верное числовое равенство.

Решить систему уравнений – значит найти все ее решения.

Множество решений системы уравнений (обозначается S) есть *пересечение* множеств решений уравнений этой системы.

Система уравнений называется **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение. Совместная система называется **определенной**, если она имеет конечное число решений, и **неопределенной**, если она имеет бесконечное множество решений.

Система уравнений называется **несовместной**, если она не имеет решений.

Решение системы уравнений начинается, как правило, с определения области допустимых значений (ОДЗ) системы.

Область допустимых значений (ОДЗ) системы уравнений есть *пересечение* областей допустимых значений уравнений системы.

Определение

Две системы уравнений называются **равносильными**, если их множества решений совпадают (равны).

Несовместные системы являются равносильными.

О Запомните!

Приведем **основные виды преобразований, сохраняющих равносильность систем**. Будем их называть **равносильными преобразованиями**. Пусть M – множество (в частности ОДЗ), на котором система определена.

- I** Если изменить порядок уравнений в системе, то получим систему, равносильную исходной на множестве M .
- II** Если заменить одно уравнение системы равносильным уравнением, то получим систему, равносильную исходной на множестве M .
- III** Если одно уравнение системы преобразовать так, чтобы одно неизвестное явно выражалось через другие неизвестные, а полученное выражение подставить в остальные уравнения системы, то это уравнение вместе с новыми полученными уравнениями составят систему, равносильную исходной на множестве M .
- IV** Если заменить одно уравнение системы уравнением, полученным в результате алгебраического сложения (почленного сложения или вычитания частей уравнений) этого уравнения с любым другим уравнением системы, то получим систему, равносильную исходной на множестве M .

Напомним *основные методы решения систем уравнений*:

- а) *метод подстановки* (см. равносильное преобразование III);
- б) *метод сложения* (см. равносильное преобразование IV);
- в) *метод введения вспомогательного неизвестного (вспомогательных неизвестных)* (или *метод замены неизвестного*);
- г) *графический метод*.

3 Понятие совокупности уравнений (систем)



**Задание
с решением**

Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение: $x^2(x-1)(x+2)=0$. (1)

Решение:

ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$. Произведение двух или нескольких множителей равно нулю, если хотя бы один из них равен нулю. Следовательно, получим $x^2=0$ или $x-1=0$, или $x+2=0$. Итак, ставится задача найти все значения неизвестного, которые являются решением хотя бы одного из этих уравнений. В этом случае говорят, что нужно решить совокупность трех уравнений с одним неизвестным. Эта совокупность уравнений обозначается:

$$\begin{cases} x^2=0, \\ x-1=0, \\ x+2=0. \end{cases} \quad (2)$$

Пусть даны уравнения $E_1(x)=0$ и $E_2(x)=0$. Если ставится задача об отыскании всех значений неизвестного x , удовлетворяющих хотя бы одному из этих уравнений, то говорят, что задана **совокупность двух уравнений**, которая обозначается: $\begin{cases} E_1(x)=0 \\ E_2(x)=0 \end{cases}$ или записывается знак „;“ между уравнениями: $E_1(x)=0$; $E_2(x)=0$ (или записывается „или“ между уравнениями: $E_1(x)=0$ **или** $E_2(x)=0$).

Аналогично обозначаются и совокупности из трех, четырех и более уравнений, а также совокупности из систем уравнений.

О Запомните!

Множество решений совокупности уравнений (систем) (обозначается S) есть **объединение** множеств решений уравнений (систем) этой совокупности.

Решим совокупность (2) на ОДЗ исходного уравнения: $\begin{cases} x^2=0, \\ x-1=0, \\ x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \in \text{ОДЗ}, \\ x=1 \in \text{ОДЗ}, \\ x=-2 \in \text{ОДЗ}. \end{cases}$

Тогда $S = \{-2, 0, 1\}$ – множество решений уравнения (1).

Рассмотрим еще два **равносильных преобразования**:

▼ Уравнение $E_1(x) \cdot E_2(x) \cdot \dots \cdot E_n(x) = 0$ на ОДЗ равно-
сильно совокупности уравнений $\begin{cases} E_1(x)=0, \\ E_2(x)=0, \\ \dots \\ E_n(x)=0. \end{cases}$

▼ Уравнение $(E_1(x))^2 = (E_2(x))^2$ на ОДЗ равносильно совокупности уравнений $\begin{cases} E_1(x) = E_2(x), \\ E_1(x) = -E_2(x). \end{cases}$



Замечание

Если уравнение в результате соответствующих преобразований сводится к совокупности уравнений, то множество решений исходного уравнения состоит только из тех решений совокупности, которые принадлежат ОДЗ исходного уравнения.

О Запомните!

При решении систем уравнений иногда применяют **метод разложения на множители**, который приводит решение исходной системы к решению совокупности систем. Например, если некоторое уравнение системы равносильно (на ОДЗ) совокупности из двух (трех и более) уравнений, то исходная система равносильна (на ОДЗ) совокупности из двух (трех и более) систем, которые получают путем замены соответствующего уравнения системы уравнениями из полученной совокупности.

**Задание
с решением**

Решим на множестве $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ систему уравнений $\begin{cases} 3x - y = 2, \\ (2x + y)^2 = 9. \end{cases}$

Решение:

$$\begin{cases} 3x - y = 2 \\ (2x + y)^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y = 2 \\ 2x + y = 3 \\ 2x + y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 3x - y = 2 \\ 2x + y = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} 3x - y = 2 \\ 2x + y = -3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 1, \\ y = 1; \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\frac{1}{5}, \\ y = -\frac{13}{5}. \end{cases} \end{cases}$$

Ответ: $S = \left\{ (1; 1), \left(-\frac{1}{5}; -\frac{13}{5} \right) \right\}$.

4 Уравнение I степени. Системы, совокупности двух уравнений I степени**Вспомним****определения**

- Уравнение вида $ax + b = 0$, где $a, b \in \mathbb{R}$, называется **линейным уравнением** (точнее, **аффинным уравнением**).
- Если $a \neq 0$, линейное уравнение называется **уравнением I степени**.

Система двух уравнений I степени с двумя неизвестными имеет вид

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

Решением системы является упорядоченная пара значений (a, b) неизвестных, которая превращает каждое уравнение системы в верное числовое равенство.

Напомним методы решения систем двух уравнений I степени с двумя неизвестными:

- ✓ метод подстановки; ✓ метод приведения; ✓ графический метод.

Запомните!

Совокупность двух уравнений I степени с одним неизвестным имеет вид: $\begin{cases} a_1x + b_1 = 0, \\ a_2x + b_2 = 0. \end{cases}$

**Задание
с решением**

Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $(3x + 1)(x - 5) = 0$.

Решение:

ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$. Имеем $(3x + 1)(x - 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 1 = 0, \\ x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3}, \\ x = 5. \end{cases}$ Значит, $S = \left\{ -\frac{1}{3}; 5 \right\}$.

Ответ: $S = \left\{ -\frac{1}{3}; 5 \right\}$.

1.3. Линейные уравнения с параметром

Пусть $F(x, a) = 0$ – уравнение, содержащее неизвестные x и a . Если ставится задача для каждого значения a решить уравнение относительно x , то уравнение $F(x, a) = 0$ называется **уравнением с неизвестным x и параметром a** .

**Задание
с решением**

Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение, где a – действительный параметр:

- а) $ax = 2$; б) $(a^2 - 9)x = a - 3$.

Решение:

а) 1) Если $a = 0$, то получаем уравнение $0 \cdot x = 2$, которое не имеет решений. Значит, $S = \emptyset$.

2) Если $a \neq 0$, то получаем уравнение I степени $ax = 2$, имеющее решение $\frac{2}{a}$. Значит, $S = \left\{ \frac{2}{a} \right\}$.

Ответ: $S = \emptyset$ при $a = 0$; $S = \left\{ \frac{2}{a} \right\}$ при $a \in \mathbb{R}^*$.

$$6) (a^2 - 9)x = a - 3 \Leftrightarrow (a - 3)(a + 3)x = a - 3.$$

1) Если $a = 3$, то получаем уравнение $0 \cdot x = 0$. Значит, $S = \mathbb{R}$.

2) Если $a = -3$, то получаем уравнение $0 \cdot x = -6$. Значит, $S = \emptyset$.

3) Если $a \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 3\}$, то получаем уравнение I степени $(a - 3)(a + 3)x = a - 3$, имеющее решение $x = \frac{1}{a + 3}$. Значит, $S = \left\{ \frac{1}{a + 3} \right\}$.

Ответ: $S = \mathbb{R}$ при $a = 3$; $S = \emptyset$ при $a = -3$; $S = \left\{ \frac{1}{a + 3} \right\}$ при $a \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 3\}$.

1.4. Неравенства I степени с одним неизвестным. Системы. Совокупности

1.4.1. Общие понятия

Вспомним

1 Понятие неравенства



определение

Неравенство, содержащее неизвестное, называется **неравенством с одним неизвестным**.

Общая форма неравенства (здесь и далее: с одним неизвестным) имеет вид: $f(x) > g(x)$ или $f(x) < g(x)$, или $f(x) \geq g(x)$, или $f(x) \leq g(x)$, где $f(x)$, $g(x)$ – математические выражения.



определения

- Множество значений неизвестного, при которых определены (существуют) все выражения, содержащиеся в неравенстве, называется **областью допустимых значений (ОДЗ)** этого неравенства.

- Число a называется **решением неравенства**, если оно обращает его в верное числовое неравенство (в истинное высказывание).

Запомните!

Решить неравенство с одним неизвестным – значит найти все его решения. Множество решений неравенства обозначим через S .



определение

Два неравенства с одним неизвестным называются **равносильными**, если их множества решений равны.

Неравенства, не имеющие решения, являются равносильными.

Запомните!

Для решения неравенств важно знать следующие основные преобразования, которые назовем **равносильными преобразованиями**:

I $\triangleright f(x) > g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) > 0;$

II $\triangleright f(x) > g(x) \Leftrightarrow g(x) < f(x);$

III $\triangleright f(x) > g(x) \Leftrightarrow af(x) > ag(x)$ при $a \in \mathbb{R}, a > 0;$

IV $\triangleright f(x) > g(x) \Leftrightarrow af(x) < ag(x)$ при $a \in \mathbb{R}, a < 0;$

V $\triangleright f(x) > g(x) \Leftrightarrow f^n(x) > g^n(x) \quad (\sqrt[n]{f(x)} > \sqrt[n]{g(x)}, n \geq 2, n \in \mathbb{N})$ при $f(x) \geq 0, g(x) \geq 0$ и n – натуральное число;

VI $\triangleright f(x) > g(x) \Leftrightarrow f^n(x) > g^n(x) \quad (\sqrt[n]{f(x)} > \sqrt[n]{g(x)}, n \geq 2, n \in \mathbb{N})$ при n – нечетное натуральное число.

Аналогичные утверждения справедливы и для неравенств вида

$$f(x) \geq g(x), f(x) < g(x), f(x) \leq g(x).$$

Внимание!

Так как при решении неравенств (особенно в случае бесконечного множества решений) проверка практически невозможна, то важно не применять в процессе решения преобразований, приводящих к посторонним решениям или к потере решений. Преобразования должны быть равносильными.

2 Системы неравенств с одним неизвестным

Вспомним, что такое система неравенств с одним неизвестным.

Пусть, например, даны два неравенства с одним неизвестным $A(x) > 0$ и $B(x) > 0$. Если ставится задача об отыскании всех значений неизвестного, которые удовлетворяют одновременно *каждому из этих неравенств*, то говорят, что нужно решить систему из двух неравенств с одним неизвестным.

Соответствующая система неравенств обозначается: $\begin{cases} A(x) > 0, \\ B(x) > 0. \end{cases} \quad (1)$

Замечания

1. Каждое неравенство в системе (1) может быть разного типа: „ $\geq$ “, „ $\leq$ “, „ $<$ “.
2. Система неравенств может содержать два или более неравенств.

Определение

Значение неизвестного, при котором верно *каждое* из неравенств системы, называется **решением** системы неравенств с одним неизвестным.

О Запомните!

Решить систему неравенств – значит найти множество ее решений.

Множество решений системы неравенств (обозначается S) есть *пересечение* множеств решений неравенств, образующих систему.

Определение

Две системы неравенств с одним неизвестным называются **равносильными**, если их множества решений совпадают.

Системы неравенств, которые не имеют решений, являются равносильными.

Равносильные системы неравенств, решаемые на некотором множестве, называются **равносильными системами неравенств на этом множестве**.

Задание с решением

Решим на множестве $\mathbb{R}$ систему неравенств $\begin{cases} 2x + 3 \geq 0, \\ 1 - 5x > 0. \end{cases}$

Решение:

$$\begin{cases} 2x + 3 \geq 0, \\ 1 - 5x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq -3, \\ 5x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1,5, \\ x < \frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[-1,5; \frac{1}{5}\right).$$

$$\text{Ответ: } S = \left[-1,5; \frac{1}{5}\right).$$

3 Совокупности неравенств с одним неизвестным

Пусть, например, даны два неравенства с одним неизвестным $A(x) < 0$ и $B(x) < 0$. Если ставится задача об отыскании всех значений неизвестного, *каждое из которых удовлетворяет по крайней мере одному из этих неравенств*, то говорят, что нужно решить совокупность из двух неравенств с одним неизвестным.

Совокупность неравенств обозначается: $\begin{cases} A(x) < 0, \\ B(x) < 0. \end{cases} \quad (2)$

Замечания

1. Каждое неравенство в совокупности (2) может быть разного типа: „ $\geq$ “, „ $>$ “, „ $\leq$ “.
2. Совокупность неравенств может содержать два или более неравенств.

Определение

Значение неизвестного, при котором верно хотя бы одно из неравенств совокупности, называется **решением** совокупности неравенств с одним неизвестным.

О Запомните!

Решить совокупность неравенств – значит найти множество его решений.

Множество решений совокупности неравенств с одним неизвестным (обозначается S) есть *объединение* множеств решений неравенств, образующих совокупность.

Определение

Две совокупности неравенств с одним неизвестным называются **равносильными**, если их множества решений совпадают (независимо от ОДЗ).

Совокупности неравенств, которые не имеют решений, являются равносильными.

1.4.2. Неравенства, системы, совокупности неравенств I степени с одним неизвестным

О Вспомним

Определение

Неравенства вида $ax + b < 0$, $ax + b \leq 0$, $ax + b > 0$, $ax + b \geq 0$, $a \neq 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, называются **неравенствами I степени с одним неизвестным**.

Как правило, неравенства I степени решаются при помощи равносильных преобразований.

Задание с решением

Решим на множестве $\mathbb{R}$ неравенство $3x - 6 \geq 0$.

Решение:

$$3x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow 3x \geq 6 \Leftrightarrow x \geq 2.$$

Графически множество решений неравенства изображается следующим образом:



Ответ: $S = [2, +\infty)$.

О Запомните!

1. Множеством решений системы неравенств I степени с одним неизвестным является пересечение множеств решений неравенств этой системы.

2. Множеством решений совокупности неравенств I степени с одним неизвестным является объединение множеств решений неравенств этой совокупности.

1.4.3. Неравенства I степени с одним неизвестным с модулем

Рассмотрим некоторые методы решения неравенств I степени, содержащих неизвестное под знаком модуля:

- 1 Неравенство вида $|f(x)| \leq g(x)$ на ОДЗ равносильно двойному неравенству $-g(x) \leq f(x) \leq g(x)$, то есть равносильно системе $\begin{cases} f(x) \geq -g(x), \\ f(x) \leq g(x). \end{cases}$

Задание с решением

Решим на множестве $\mathbb{R}$ неравенство $|2x - 1| \leq 0,5$.

Решение:

$$|2x - 1| \leq 0,5 \Leftrightarrow -0,5 \leq 2x - 1 \leq 0,5 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 \geq -0,5, \\ 2x - 1 \leq 0,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq 0,5, \\ 2x \leq 1,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0,25, \\ x \leq 0,75. \end{cases}$$

Значит, $x \in [0,25; 0,75]$.

Ответ: $S = [0,25; 0,75]$.

О Запомните!

Аналогично решается неравенство вида $|f(x)| < g(x)$.

- 2 Неравенство вида $|f(x)| \geq g(x)$ на ОДЗ равносильно совокупности $\begin{cases} f(x) \geq g(x), \\ f(x) \leq -g(x). \end{cases}$

Задание с решением

Решим на множестве $\mathbb{R}$ неравенство $|3 - x| \geq 5$.

Решение:

$$|3 - x| \geq 5 \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - x \geq 5, \\ 3 - x \leq -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2, \\ x \geq 8 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2] \cup [8, +\infty).$$

Ответ: $S = (-\infty, -2] \cup [8, +\infty)$.

О Запомните!

Аналогично решается неравенство вида $|f(x)| > g(x)$.

3 Неравенство вида $|f(x)| \leq |g(x)|$ на ОДЗ равносильно неравенству $f^2(x) \leq g^2(x)$.

Пример: $|x-2| \leq |2x+1| \Leftrightarrow (x-2)^2 \leq (2x+1)^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 \leq 4x^2 + 4x + 1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 3x^2 + 8x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -3] \cup \left[\frac{1}{3}, +\infty\right).$

Упражнения и задачи



Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт

A

1. Найдите угловой коэффициент и постройте график функции:

а) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 10$;

б) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 3 - x$;

в) $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = -5x$;

г) $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, p(x) = 1,5$.

2. **Исследуйте!** Определите тип угла, образованного положительным направлением оси Ox и графиком функции:

а) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 6x + 1$;

б) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 1 - 3x$;

в) $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = -2,3x$;

г) $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, p(x) = 5$.

3. **Работайте в парах!** Дана функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

а) $f(x) = 1 - 2x$; б) $f(x) = 1,5x + 6$.

1) Найдите нули функции f .

2) Постройте график функции f .

3) Используя график функции, найдите значение x , при которых: а) $f(x) > 0$; б) $f(x) \leq 0$.

4) Определите тип угла, образованного G_f и положительным направлением оси Ox .

5) Определите, является ли функция f строго возрастающей.

4. Дана функция $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

а) $g(x) = 3,5x$; б) $g(x) = -\frac{2}{3}x$.

1) Найдите нули функции g .

2) Постройте график функции g .

3) Используя график функции, найдите значение x , при которых: а) $g(x) > 0$; б) $g(x) < 0$.

4) Определите тип угла, образованного G_g и положительным направлением оси Ox .

5) Определите, является ли функция g строго убывающей.

5. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $3,5(x-2) = 7$;

б) $\sqrt{3}x - \sqrt{2} = 0$;

в) $-\frac{3}{4} + 6x = 3(x-1)$.

6. **Работайте в парах!** Решите на множестве $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ тремя методами систему уравнений:

а) $\begin{cases} 2x - y = 3, \\ -3x + 2y = -4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} -0,5x + 2y = 2, \\ 3x - y = -1. \end{cases}$

7. Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство:

а) $9(x-2) - 3(2x+1) > 5x$;

б) $4(2x-1) - 3(3x+2) > 0$.

8. **Работайте в парах!** Даны функции $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 12 - x, g(x) = -2,5x + 6$.

а) Найдите нули функций f и g .

б) Определите интервалы, на которых $f(x) \geq 0; f(x) < 0; g(x) \leq 0; g(x) > 0$.

в) Найдите координаты точки пересечения графиков функций G_f и G_g .

г) Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство $f(x) < g(x)$.

д) Решите на множестве $\mathbb{R}$ систему неравенств $\begin{cases} f(x) \leq 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$

B

9. Известно, что длина реки Прут на 399 км больше длины реки Днестр.

а) Какова длина каждой из этих рек, если сумма их длин равна 2305 км?

б) Какая часть реки Прут и реки Днестр находится на территории Республики Молдова? (Воспользуйтесь географической картой.)



10. Найдите нули функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

а) $f(x) = 2x + 1$;

б) $f(x) = (x + 5)(1 - 2x)$;

в) $f(x) = (2 - x)(x + 4)(\sqrt{3} + x)$.



11. В момент времени $t = 0$ количество бактерий равно 2400.

Через 5 ч 30 мин их число возросло до 22 200 бактерий.

а) Задайте зависимость количества бактерий от времени (измеренного в часах) в виде функции.

б) Определите, через сколько часов количество бактерий будет равно 56 400.



Работайте в парах! Переведите на математический язык, затем решите задачу:

а) с помощью уравнения;

б) с помощью системы уравнений.

1) Сумма двух действительных чисел равна 44. Найдите эти числа, если известно, что одно из них на 10 больше другого.

2) Разность двух действительных чисел равна 45. Найдите эти числа, если известно, что одно из них в 10 раз меньше другого.

3) На двух овощных базах хранятся 520 т яблок. Если перевести 60 т яблок из одной базы на другую, то количество яблок на обеих базах было бы равным. Какое количество яблок было изначально на каждой базе?

13. На стоянке припаркованы двухколесные мотоциклы и автомашины. Всего 48 единиц и 168 колес. Сколько мотоциклов и сколько машин на этой стоянке?

Решите задачу: а) методом фальшивой гипотезы;

б) с помощью уравнения;

в) с помощью системы уравнений.



14. Сумма в размере 2 760 леев выплачивается банкнотами достоинством 20 леев и 50 леев. Найдите количество банкнот каждого вида, если известно, что количество банкнот достоинством 50 леев в два раза больше количества банкнот достоинством 20 леев.

15. Отцу 33 года, а дочери 9 лет. Через сколько лет отец будет в три раза старше дочери?

16. Постройте график функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, если:

а) $a = 3$, $b = -1$;

б) $a = -2,5$, $b = 2$;

в) $a = \frac{1}{4}$, $b = 0$;

г) $a = 0$, $b = -5$;

д) $a = -3$, $b = -2$;

е) $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{5}$.

17. Дополните действительным числом, чтобы график функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

а) $f(x) = \square x + 2$;

б) $f(x) = -\square \cdot x - \sqrt{2}$;

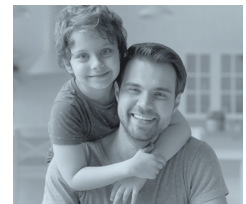
в) $f(x) = \square \cdot x$;

г) $f(x) = -\square \cdot x$

образовал бы с положительным направлением оси Ox :

1) острый угол; 2) тупой угол.

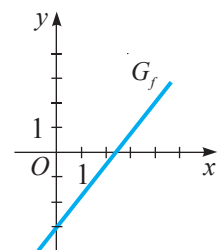
18. Сергею 7 лет, а его отцу 39 лет. Найдите, сколько еще лет возраст Сергея будет меньше, чем $\frac{2}{3}$ возраста отца.



19. **Исследуйте!** Найдите значения x , $x \in \mathbb{R}$, при которых существуют треугольники со сторонами, длины которых равны $3x + 1$, $x + 3$, $4x - 2$.

20. (ЕГЭ 2016) На рисунке изображен график функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$. Используя рисунок, впишите один из знаков $<$, $>$ или $=$ так, чтобы получилось истинное высказывание: $\frac{b}{a} \quad 0$.

21. (ЕГЭ 2022) Дана функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -6x + 2$. Найдите значения x , при которых $f(x) > f(3)$.



С

22. Решите тремя методами задачу:

- а) За рабочий день 25 строителей получили 6 500 леев. Зарплата некоторых из них составляет 200 леев за день, а остальных – в 1,5 раза больше. Сколько строителей получили по 200 леев за рабочий день?
- б) Бассейн емкостью 35,7 гектолитра можно наполнить водой из двух труб за 7 ч. За час через одну трубу протекает воды на 90 л больше, чем через другую. Сколько воды поступает в час через каждую трубу?



23. Укажите в декартовой системе координат множество точек:

- 1) абсциссы которых удовлетворяют неравенству: а) $-3 < x < 2$; б) $-1 \leq x < 6$;
2) ординаты которых удовлетворяют неравенству: а) $-1 < y < 2$; б) $3 < y \leq 5$.

Реальный профиль

A₁

1. Даны функции: $f(x) = 2x + 1$, $f_1(x) = 2 - x$, $f_2(x) = 0,5 + \sqrt{2}x$, $f_3(x) = -\sqrt{5}$, $f_4(x) = 1,5x$, $f_5(x) = 10$, $f_6(x) = -3x$.
Определите, какие из этих функций
а) являются возрастающими на $\mathbb{R}$. б) являются убывающими на $\mathbb{R}$.
2. Задайте формулой функцию I степени, зная, что:
а) $f(2) = 1$ и $f(0) = -2$; б) $f(-1) = 4$ и $f(1) = 0$; в) $f(\sqrt{3}) = 1 - \sqrt{2}$ и $f(2) = 2$.
3. Даны функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5x + 2$, и $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = -2x$.
а) Найдите координаты точек пересечения графиков G_f и G_g .
б) Найдите значения x , при которых $f(x) \leq g(x)$.
4. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение: $x(x - 2)(2x + 1)(2x - 1) = 0$.
5.  **Исследуйте!** Даны функции $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 5$, $g(x) = 1 - 2x$.
а) Докажите, что f строго возрастает на множестве $\mathbb{R}$, а g строго убывает на $\mathbb{R}$.
б) Найдите значения x , при которых график G_f расположен выше графика G_g .

B₁

6.  **Работайте в парах!** Решите задачу: а) с помощью уравнения; б) с помощью системы уравнений.
Расстояние между двумя вокзалами равно 650 км. Скорый поезд проходит это расстояние на 12 ч быстрее, чем товарный поезд, поскольку его скорость на 24 км/ч больше, чем скорость товарного поезда. Найдите скорость каждого поезда.
7. Найдите действительные числа x и y , если известно, что $3x - 2y = -5$ и $x + 3y = 2$.
8. Решите на множестве $\mathbb{R}$ систему неравенств: а) $\begin{cases} 3x - 1 > 0, \\ 5 - x \leq 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -2x + 3 > 5, \\ 0,5x - 1 < 1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3(x - 2) \geq 9, \\ 1,4x - 28 < 0. \end{cases}$
9.  **Работайте в группах!** Решите на множестве $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ систему уравнений:
а) $\begin{cases} 2x - 3y - 8 = 0, \\ 4x + y - 2 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - 3y = 7, \\ 3x + 2y = -9; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2 - x + \sqrt{3}y = 0, \\ 3x - \sqrt{3}y = \sqrt{3}. \end{cases}$

C₁

10. Сплав из меди и олова массой 12 кг содержит 45% меди. Сколько килограммов олова следует добавить к этому сплаву, чтобы получить сплав, содержащий 40% меди?
11. Имеется сталь двух сортов с содержанием никеля 5% и 40%. Сколько нужно взять каждого из этих сортов стали, чтобы после их плавки получить 140 т стали с содержанием никеля 30%?
- 12*.  **Исследуйте!** При каких значениях действительного параметра a система уравнений:
$$\begin{cases} x + (2a - 1)y = 2a, \\ (2a + 1)x + (a^2 + 2)y = 2(a^2 + a + 1) \end{cases}$$

а) совместна и определена; б) совместна и неопределена; в) несовместна?

§2 Функция II степени. Уравнения II степени. Неравенства II степени. Системы. Совокупности



2.1. Функция II степени

Вспомним

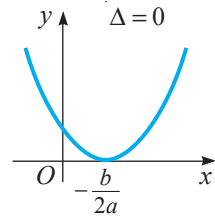
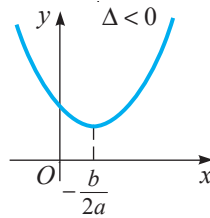
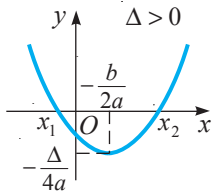
Определение

Функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, называется **функцией II степени**.

Исследуем

Используя график функции II степени (рис. 7.3), определите ее свойства.

$a > 0$



$a < 0$

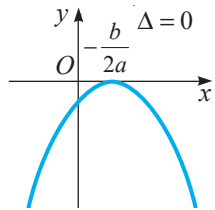
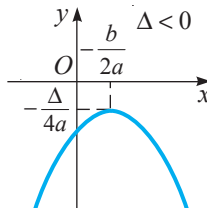
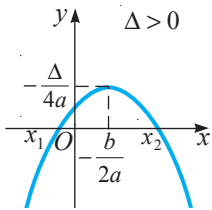


Рис. 7.3

2.2. Уравнения II степени с одним неизвестным

Вспомним

Определение

Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, называется **уравнением II степени** (или **квадратным уравнением**), а a, b, c называются его **коэффициентами**.

Отмечаем, что решения уравнения II степени являются абсциссами точек пересечения графика функции II степени, соответствующей этому уравнению, с осью Ox .

Существование действительных решений квадратного уравнения, а также их количество зависит от значения дискриминанта $\Delta = b^2 - 4ac$ данного уравнения.

1) Если $D < 0$, то уравнение не имеет действительных решений. Значит, $S = \emptyset$.

2) Если $D = 0$, то квадратное уравнение имеет одно действительное решение: $x = -\frac{b}{2a}$. Значит, $S = \left\{ -\frac{b}{2a} \right\}$.

3) Если $D > 0$, то квадратное уравнение имеет два различных действительных решения: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$. Значит, $S = \left\{ \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right\}$.

Уравнение II степени $ax^2 + bx + c = 0$, где $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, делением на a сводится к равносильному **приведенному квадратному уравнению**: $x^2 + px + q = 0$, $p, q \in \mathbb{R}$.

**Теорема 1****(теорема Виета)**

Если x_1, x_2 – решения уравнения $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$, (1)

$$\text{то } \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}. \end{cases} \quad (2)$$

Если x_1, x_2 – решения уравнения $x^2 + px + q = 0$, (3)

$$\text{то } \begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 \cdot x_2 = q. \end{cases} \quad (4)$$

**Теорема 2****(обратная теорема Виета)**

Если действительные числа x_1, x_2 удовлетворяют соотношениям (2), то эти числа являются решениями уравнения (1).

Если действительные числа x_1, x_2 удовлетворяют условиям (4), то эти числа являются решениями уравнения (3).

2.3. Уравнения II степени с параметром

Пусть $F(x, a) = 0$ – уравнение II степени, содержащее неизвестные x и a . Если ставится задача для каждого значения a решить уравнение относительно x , то уравнение $F(x, a) = 0$ называется **уравнением II степени с неизвестным x и параметром a** .

**Задание с решением**

Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение с параметром $a, a \in \mathbb{R}$:

$$(a-1)x^2 - 2(2a-1)x + 4a + 3 = 0.$$

Решение:

1) Рассмотрим сначала случай, когда коэффициент при x^2 принимает значение нуль, так как в этом случае заданное уравнение преобразуется в уравнение I степени. Получаем: $a = 1$.

При $a = 1$ уравнение принимает вид: $-2x + 7 = 0 \Leftrightarrow x = 3,5$.

2) При $a \neq 1$ находим значения параметра a , при которых дискриминант принимает значение нуль: $\Delta = 4(2a-1)^2 - 4(a-1)(4a+3) = -12a + 16 = 0 \Leftrightarrow a = 1\frac{1}{3}$.

Если $a > 1\frac{1}{3}$, то $D < 0$ и уравнение не имеет действительных решений.

Если $a < 1\frac{1}{3}$ и $a \neq 1$, то $\Delta > 0$ и уравнение имеет решения:

$$x_1 = \frac{(2a-1) - \sqrt{4-3a}}{a-1}, \quad x_2 = \frac{(2a-1) + \sqrt{4-3a}}{a-1}.$$

Ответ: $S = \{3,5\}$ при $a = 1$;

$$S = \emptyset \text{ при } a \in \left(1\frac{1}{3}, +\infty\right);$$

$$S = \left\{ \frac{2a-1-\sqrt{4-3a}}{a-1}, \frac{2a-1+\sqrt{4-3a}}{a-1} \right\} \text{ при } a \in (-\infty, 1) \cup \left(1, 1\frac{1}{3}\right);$$

$$S = \{5\} \text{ при } a = 1\frac{1}{3}.$$

2.4. Геометрическая интерпретация некоторых уравнений II степени с двумя неизвестными

Геометрически множество решений уравнения с двумя неизвестными изображается соответствующим множеством точек в декартовой системе координат. Форма фигуры зависит от степени уравнения и его вида.

Наиболее простые уравнения II степени с двумя неизвестными и их геометрические изображения представлены на рисунке 7.4.

Используя уравнения этих фигур, можно решить разные задачи.

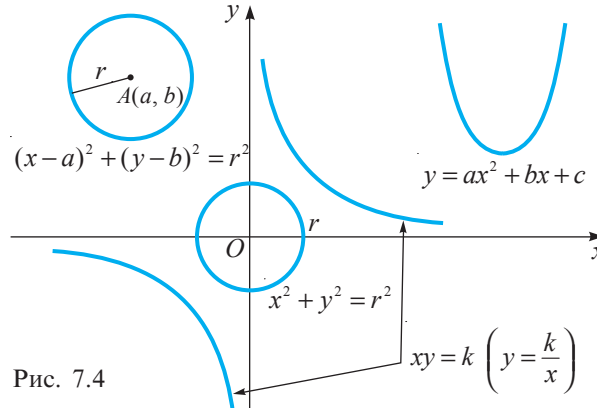


Рис. 7.4



1. Часть дороги имеет форму прямой, заданной уравнением $y = -4x + 3$. Часть железной дороги имеет форму гиперболы, заданной уравнением $y = \frac{3}{x}$. Если прямолинейная дорога будет построена, пересечется ли она с железной дорогой?

Решение:

Задача сводится к нахождению точек пересечения соответствующих прямой и гиперболы. В свою очередь, эта задача сводится к определению совместности

системы уравнений:
$$\begin{cases} y = -4x + 3, \\ y = \frac{3}{x}. \end{cases}$$
 Подставляя y во второе уравнение, получаем систему

тем
$$\begin{cases} y = -4x + 3, \\ -4x + 3 = \frac{3}{x}. \end{cases}$$
 Так как второе уравнение не имеет действительных решений

(Проверьте!), то и система не имеет решений. Значит, построенная прямолинейная дорога не пересечет железную дорогу.

2. Найдите радиус и центр окружности, касательной с осями координат и с гиперболой $y = \frac{4}{x}$ (рис. 7.5).

Решение:

Исходя из симметрических соображений, ясно, что центр этой окружности будет расположен на прямой, заданной уравнением $y = x$, следовательно, его координатами будут (a, a) . Эта прямая пересекает гиперболу в точке A ,

координаты которой являются решениями системы:
$$\begin{cases} y = x, \\ y = \frac{4}{x}. \end{cases}$$

Получаем: $A_1(-2; -2)$, $A(2; 2)$. Замечаем, что $A_1(-2; -2)$ не удовлетворяет условию задачи. Центр C окружности будет удовлетворять условию: $AC = a$, значит, $\sqrt{(a-2)^2 + (a-2)^2} = a$, $|a| < 2$. Получаем: $a = 4 - 2\sqrt{2}$. Таким образом, центром окружности является точка $C(4 - 2\sqrt{2}, 4 - 2\sqrt{2})$ и ее радиус $r = 4 - 2\sqrt{2}$.

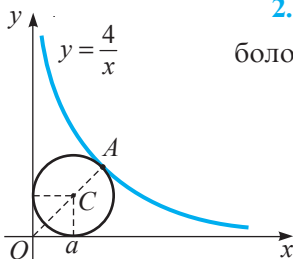


Рис. 7.5

2.5. Уравнения с одним неизвестным с модулем

Уравнения с модулем решаются различными методами.

1 Применение определения модуля

Пример. $|x-2|=5 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=5, \\ x-2 \geq 0; \\ x-2=-5, \\ x-2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7, \\ x=-3. \end{cases}$

Ответ: $S = \{-3; 7\}$.

2 Использование соотношения $|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) = g^2(x)$

Пример. $|x+3| = |2x-1| \Leftrightarrow (x+3)^2 = (2x-1)^2 \Leftrightarrow 3x^2 - 10x - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3}, \\ x = 4. \end{cases}$

Ответ: $S = \left\{-\frac{2}{3}, 4\right\}$.

3 Применение соотношения $|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{cases}$

Пример. $|x^2 - x| = |4 + 2x| \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x = 4 + 2x, \\ x^2 - x = -4 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x - 4 = 0, \\ x^2 + x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, \\ x = 4. \end{cases}$

Ответ: $S = \{-1; 4\}$.

4 Использование вспомогательных неизвестных (замена неизвестных)

Пример. Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $2x^2 - |x| - 1 = 0$.

Решение:

ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$. Пусть $|x| = t$, $t \geq 0$. Так как $x^2 = |x|^2$, то получим уравнение $2t^2 - t - 1 = 0$, имеющее корни $t_1 = 1$, $t_2 = -\frac{1}{2}$. Значит, решение исходного уравнения свелось к

решению совокупности из двух уравнений: $\begin{cases} |x| = 1, \\ |x| = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ x = -1. \end{cases}$

Ответ: $S = \{-1; 1\}$.

5 Применение метода раскрытия модулей

Пример. Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $|2x-1| - 3|x+3| = 2x$.

Решение:

1) Определим ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$.

2) Находим нули выражений, стоящих под знаком модуля: $2x-1=0 \Leftrightarrow x=0,5$; $x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$.

3) Полученные нули делят числовую ось (в общем случае ОДЗ исходного уравнения) на интервалы $(-\infty, -3)$, $[-3, 0,5)$, $[0,5, +\infty)$:

4) Раскрываем соответствующие модули на каждом интервале:

5) Решаем уравнение на каждом интервале

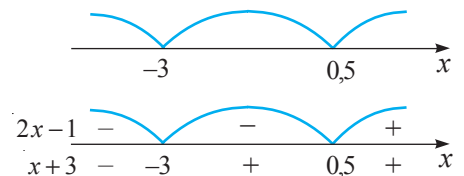
с учетом раскрываемости модулей на соответствующем интервале.

Рассмотрим следующие случаи.

а) Для $x \in (-\infty, -3)$ имеем $2x-1 < 0$, $x+3 \leq 0$. Тогда, $|2x-1| = -(2x-1)$, $|x+3| = -(x+3)$ и получаем:

$$-(2x-1) + 3(x+3) = 2x \Leftrightarrow -x + 10 = 0 \Leftrightarrow x = 10 \notin (-\infty, -3).$$

Итак, $x = 10$ не является решением исходного уравнения.



б) Для $x \in \left[-3, \frac{1}{2}\right)$ имеем $2x - 1 \leq 0$, $x + 3 \geq 0$ и получаем:

$$-(2x - 1) - 3(x + 3) = 2x \Leftrightarrow -7x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{8}{7} \in \left[-3, \frac{1}{2}\right).$$

Следовательно, $x = -\frac{8}{7}$ – решение исходного уравнения.

в) Для $x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ имеем $2x - 1 \geq 0$, $x + 3 > 0$ и получаем:

$$2x - 1 - 3(x + 3) = 2x \Leftrightarrow x = -\frac{10}{3} \notin \left[\frac{1}{2}, +\infty\right).$$

Значит, $x = -\frac{10}{3}$ не является решением исходного уравнения.

б) Ответ представляет собой объединение множеств решений, полученных в каждом из рассмотренных случаев.

$$\text{Ответ: } S = \left\{-\frac{8}{7}\right\}.$$

6 Графический метод

Пример

Определим, при каких значениях действительного параметра a уравнение $|x^2 - 2x - 3| = a$ имеет три действительных решения.

Решение:

Строим график функции, заданной формулой $f(x) = |x^2 - 2x - 3|$ и $g(x) = a$ (рис. 7.6). Замечаем, что только прямая параллельная оси Oy , заданная уравнением $y = 4$, имеет 3 общие точки с построенным графиком. Итак, при $a = 4$ исходное уравнение имеет ровно три действительных решения.

Ответ: $a = 4$.

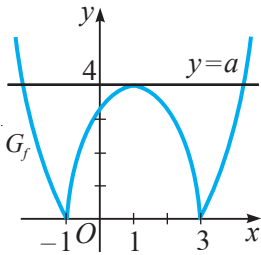


Рис. 7.6

2.6. Неравенства II степени с одним неизвестным



Задание
с решением

Высота h , на которую поднимется мяч, брошенный вертикально вверх, рассчитывается по формуле $h(t) = -5t^2 + 12t + 2$, где h измеряется в метрах, а t – время с момента броска (измеряется в секундах). Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее 6 м?

Решение:

Чтобы ответить на вопрос задачи, следует найти интервал времени при котором $h(t) \geq 6$. Таким образом, решаем неравенство $-5t^2 + 12t + 2 \geq 6$ или неравенство $5t^2 - 12t + 4 \leq 0$. Получаем $t \in [0,4; 2]$. (Проверьте!) Следовательно, величина соответствующего интервала времени $2 - 0,4 = 1,6$ (секунды).

Ответ: 1,6 секунды.



Вспомним



определение

Неравенства вида $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, называются **неравенствами II степени с одним неизвестным**.

Рассмотрим два метода решения неравенств II степени.

1 Применение результатов исследования функции

Пусть функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. В таблице (стр. 118) указаны множества решений неравенства $ax^2 + bx + c > 0$, $a \neq 0$, в зависимости от значений коэффициента a и дискриминанта $\Delta = b^2 - 4ac$, где $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ ($\Delta \geq 0$) – решения уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, и $x_1 \leq x_2$.

Значения		Множество решений неравенства $ax^2 + bx + c > 0, a \neq 0$	Знак функции, заданной формулой $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$
a	D		
$a > 0$	$D > 0$	$S = (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$	
	$D = 0$	$S = \left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right) \cup \left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$	
	$D < 0$	$S = (-\infty, +\infty)$	
$a < 0$	$D > 0$	$S = (x_1, x_2)$	
	$D = 0$	$S = \emptyset$	
	$D < 0$	$S = \emptyset$	

○ **Запомните!**

Множество решений неравенства $ax^2 + bx + c \geq 0, a \neq 0$, получается путем добавления решений уравнения $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$, к множеству решений неравенства $ax^2 + bx + c > 0$. Например, множеством решений неравенства $ax^2 + bx + c \geq 0$ при $a > 0, D > 0$ является множество $S = (-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty)$.

Аналогично получают множества решений других видов неравенств II степени.

○ **Вспомним**

2 Метод интервалов

Изложим суть применения метода интервалов на примере решения на множестве $\mathbb{R}$ неравенства $x^2 - 7x + 12 \leq 0$.

Решение:

ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$.

Решениями квадратного уравнения $x^2 - 7x + 12 = 0$ являются $x_1 = 3, x_2 = 4$.

Разложим выражение $x^2 - 7x + 12$ на множители: $x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4)$. Тогда получим неравенство $(x - 3)(x - 4) \leq 0$, равносильное исходному.

Применив метод интервалов, строим „кривую знаков“:

Итак, $x \in [3, 4]$.

Ответ: $S = [3, 4]$.



2.7. Неравенства II степени с модулем

Неравенства II степени с модулем также решаются разными методами.

1 Неравенство вида $|f(x)| \leq g(x)$ на ОДЗ равносильно двойному неравенству $-g(x) \leq f(x) \leq g(x)$, то есть системе $\begin{cases} f(x) \geq -g(x), \\ f(x) \leq g(x). \end{cases}$

Пример

$$\begin{aligned} \text{ОДЗ: } x \in \mathbb{R}. \quad |3x^2 - 5| \leq 4 &\Leftrightarrow -4 \leq 3x^2 - 5 \leq 4 \Leftrightarrow 1 \leq 3x^2 \leq 9 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 \geq 1, \\ 3x^2 \leq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq \frac{1}{3}, \\ x^2 \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right), \\ x \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}] \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in \left[-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}\right]. \end{aligned}$$

Аналогично решаются неравенства для случая „<“.

2 Неравенство вида $|f(x)| \geq g(x)$ на ОДЗ равносильно совокупности

$$\begin{cases} f(x) \geq g(x), \\ f(x) \leq -g(x). \end{cases}$$

Пример

$$|2 - x^2| \geq 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x^2 \geq 3, \\ 2 - x^2 \leq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \leq -1, \\ x^2 \geq 5 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 \geq 5 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -\sqrt{5}] \cup [\sqrt{5}, +\infty).$$

Аналогично решаются неравенства для случая „>“.

3 Метод замены неизвестных

Пример

Решим на множестве $\mathbb{R}$ неравенство $(x-1)^2 - 4|x-1| + 3 \leq 0$.

Решение:

$$\text{ОДЗ: } x \in \mathbb{R}. \quad (x-1)^2 = |x-1|^2.$$

Пусть $|x-1| = t$, $t \geq 0$. Тогда получаем неравенство $t^2 - 4t + 3 \leq 0$, имеющее решения $t \in [1, 3]$, или $1 \leq t \leq 3$.

$$\text{Возвращаясь к неизвестному } x, \text{ получаем: } 1 \leq |x-1| \leq 3 \Leftrightarrow \begin{cases} |x-1| \geq 1, \\ |x-1| \leq 3. \end{cases}$$

Решаем первое неравенство системы:

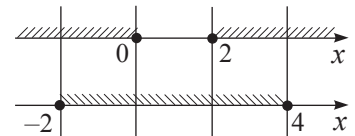
$$|x-1| \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 1, \\ x-1 \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2, \\ x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0] \cup [2, +\infty).$$

Для второго неравенства имеем:

$$|x-1| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x-1 \leq 3 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 4 \Leftrightarrow x \in [-2, 4].$$

Итак, система, а значит и исходное неравенство, имеют решения: $x \in [-2, 0] \cup [2, 4]$.

Ответ: $S = [-2, 0] \cup [2, 4]$.



4 Метод раскрытия модулей. Алгоритм применения этого метода для решения неравенств с модулем аналогичен алгоритму решения уравнений с модулем.

2.8. Однородные системы уравнений



Определения

- Многочлен $P(X, Y, \dots, U, V)$ степени n с переменными $X, Y, \dots, U, V$ называется **однородным многочленом**, если для любой системы числовых значений $(x, y, \dots, u, v)$ переменных и любого фиксированного числового значения $\lambda \in \mathbb{R}^*$ имеет место равенство: $P(\lambda x, \lambda y, \dots, \lambda u, \lambda v) = \lambda^n P(x, y, \dots, u, v)$.
- Алгебраическое уравнение $P(x, y, \dots, u, v) = 0$ называется **однородным уравнением n -й степени**, если многочлен $P(X, Y, \dots, U, V)$ является однородным многочленом n -й степени.

- Система двух алгебраических уравнений с двумя неизвестными вида:

$$\begin{cases} a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + a_2 x^{n-2} y^2 + \dots + a_{n-1} x y^{n-1} + a_n y^n = c, \\ b_0 x^n + b_1 x^{n-1} y + b_2 x^{n-2} y^2 + \dots + b_{n-1} x y^{n-1} + b_n y^n = d, \end{cases}$$

где $a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$, $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$, называется **однородной системой n -й степени** (левые части обоих уравнений системы являются однородными многочленами n -й степени).



Задание с решением

Решим на множестве $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ систему уравнений $\begin{cases} x^2 + 4xy - y^2 = -2, \\ x^2 - 3xy = 4. \end{cases}$

Решение:

Эта система является однородной системой второй степени.

ОДЗ: $(x; y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Умножим обе части первого уравнения на 2, затем сложим уравнения системы. Получим систему $\begin{cases} 3x^2 + 5xy - 2y^2 = 0, \\ x^2 - 3xy = 4, \end{cases}$ равносильную исходной, содержащую одно однородное уравнение. Разделим обе части первого уравнения полученной системы на x^2 ($x \neq 0$, так как $x = 0$ не является решением) и получим уравнение II степени $\frac{y}{x}: 3 + 5\left(\frac{y}{x}\right) - 2\left(\frac{y}{x}\right)^2 = 0$, имеющее решения $\frac{y}{x} = 3$ и $\frac{y}{x} = -\frac{1}{2}$.

Итак, решение исходной системы свелось к решению следующей совокупности систем уравнений: $\begin{cases} y = 3x, \\ x^2 - 3xy = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x, \\ x^2 - 3xy = 4. \end{cases}$

Первая система не имеет решений. (Проверьте!)

Вторая система имеет следующие решения: $(-2\sqrt{0,4}; \sqrt{0,4}); (2\sqrt{0,4}; -\sqrt{0,4})$. (Проверьте!)

Ответ: $S = \{(-2\sqrt{0,4}; \sqrt{0,4}); (2\sqrt{0,4}; -\sqrt{0,4})\}$.



Замечание

Если упорядоченная пара $(a; b)$ является решением системы однородных уравнений второй степени, то и пара $(-a; -b)$ является решением этой системы.

2.9. Симметрические системы уравнений



Определение

Уравнение с двумя неизвестными называется **симметрическим**, если при замене x на y , а y на x уравнение не меняется.

Например, уравнения $3x^2 + 2xy + 3y^2 = 5$ и $x + y - 3 = 0$ – симметрические.



Определение

Система, все уравнения которой являются симметрическими, называется **симметрической системой**.



Замечание

Так как уравнения с двумя неизвестными симметрической системы не меняются при замене y на x и x на y , следовательно, если (a, b) является решением симметрической системы, то (b, a) также является решением этой системы.

Симметрическая система с двумя неизвестными решается, как правило, методом введения вспомогательных неизвестных.



Решим на множестве $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ систему уравнений $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = -2, \\ x + y + 2xy = 1. \end{cases}$

Решение:

Исходная система – симметрическая. Пусть $\begin{cases} x + y = u, \\ xy = v. \end{cases}$ Получим систему $\begin{cases} u^2 - 3v = -2, \\ u + 2v = 1. \end{cases}$

Подставляя $u = 1 - 2v$ в первое уравнение, получаем уравнение $(1 - 2v)^2 - 3v + 2 = 0$, имеющее решения $v_1 = 1, v_2 = \frac{3}{4}$. Тогда $u_1 = -1, u_2 = -\frac{1}{2}$.

Решение системы свелось к решению совокупности из двух систем уравнений:

$$\begin{cases} x + y = -1, \\ xy = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = -\frac{1}{2}, \\ xy = \frac{3}{4}. \end{cases}$$

Обе системы несовместны на множестве $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. (Проверьте!) Значит, исходная система не имеет решений.

Ответ: $S = \emptyset$.



Решение однородных систем алгебраических уравнений и симметрических систем уравнений, как правило, сводится к решению совокупности систем.

2.10. Рациональные уравнения

Выражение вида $\frac{P}{Q}$, где P, Q – многочлены, $\text{grad} Q \geq 1$, называется **рациональным выражением**.



• Уравнение $E_1(x) = E_2(x)$, где $E_1(x), E_2(x)$ – многочлены, называется **алгебраическим уравнением** с одним неизвестным.

• Уравнение $E_1(x) = E_2(x)$, где $E_1(x), E_2(x)$ – рациональные выражения, хотя бы одно из которых содержит переменную в знаменателе, называется **дробно-рациональным уравнением** (или **уравнением с неизвестным в знаменателе**).

О Запомните!

Рациональные уравнения решают в соответствии со следующим **алгоритмом**:

- ① находим ОДЗ уравнения;
- ② переносим все слагаемые в левую часть уравнения;
- ③ приводим левую часть уравнения к виду $\frac{A}{B}$;
- ④ получим $\frac{A}{B} = 0$.
- ⑤ решаем на ОДЗ уравнение $A = 0$;
- ⑥ записываем множество решений.



Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $\frac{x}{x-3} - \frac{5}{x+3} = \frac{18}{x^2-9}$.

Решение:

ОДЗ: $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$. Имеем $\frac{x}{x-3} - \frac{5}{x+3} - \frac{18}{x^2-9} = 0$.

Приводим левую часть к общему знаменателю: $\frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9} = 0$.

Получим уравнение $x^2 - 2x - 3 = 0$, решениями которого являются $x_1 = 3, x_2 = -1$.

Значение 3 не принадлежит ОДЗ, следовательно, оно не является решением исходного уравнения.

Ответ: $S = \{-1\}$.

2.11. Рациональные неравенства с одним неизвестным. Метод интервалов



Определение

Неравенства вида $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$, $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$, $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$, $\frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$, где $P(x)$, $Q(x)$ – многочлены, $\text{grad } Q(x) \geq 1$, называются **рациональными неравенствами с одним неизвестным**.

Рациональные неравенства решаются разными методами.

1 Учитывая знак отношения $\frac{P(x)}{Q(x)}$

Например, решение неравенства $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ сводится к решению совокупности двух систем неравенств (понятия *система неравенств*, *совокупность неравенств* будут даны позже): $\begin{cases} P(x) > 0, \\ Q(x) > 0; \end{cases} \begin{cases} P(x) < 0, \\ Q(x) < 0. \end{cases}$

2 Применяя равносильности вида:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \Leftrightarrow P(x) \cdot Q(x) > 0; \quad \frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) \cdot Q(x) \geq 0, \\ Q(x) \neq 0. \end{cases}$$

3 Применяя метод интервалов – один из более эффективных методов решения рациональных неравенств.

Пусть функция f задана формулой $f(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)(x-d)}$, где, например, $a < b < c < d$ и $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Если $x > d$, то каждый из множителей $x - a$, $x - b$, $x - c$, $x - d$ положителен. Значит, на интервале $(d, +\infty)$ имеем $f(x) > 0$. Если $c < x < d$, то $x - d < 0$, а все остальные множители положительны. Следовательно, $f(x) < 0$ на интервале (c, d) . Аналогично на интервале (b, c) имеем $f(x) > 0$ (рис. 7.6). В этом случае говорят, что в точке c функция меняет свой знак.

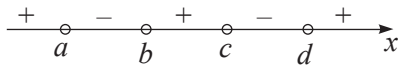


Рис. 7.6

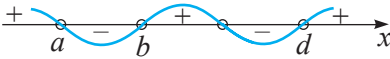


Рис. 7.7

Аналогично имеем для точек a, b, d (рис. 7.6).

Чередование знаков функции f графически изображается при помощи „кривой знаков“ (рис. 7.7), которая чертится справа налево и сверху вниз.

Изображение на рисунке 7.7 интерпретируется следующим образом: на интервалах, где „кривая знаков“ расположена выше числовой оси, справедливо неравенство $f(x) > 0$, а на интервалах, где „кривая знаков“ расположена ниже числовой оси, имеем $f(x) < 0$.

Приведенные рассуждения не зависят от количества линейных множителей, содержащихся в числителе и знаменателе, а также от расположения найденных нулей числителя и знаменателя на числовой оси. Поэтому такие рассуждения справедливы и для функции f , заданной формулой

$$f(x) = \frac{(x-a_1)(x-a_2) \dots (x-a_n)}{(x-b_1)(x-b_2) \dots (x-b_m)}, \quad (1)$$

где числа $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_m$ – действительные и различные. Для этой функции аналогично строится „кривая знаков“.



Замечание

При применении метода интервалов следует учитывать следующее: только в случаях, когда функция имеет вид (1), то есть все коэффициенты при x равны 1 и все числа $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_m$ различны, „кривая знаков“ строится справа налево и сверху вниз. В остальных случаях знак функции на каждом интервале определяется „пробными значениями“, путем подстановки этих значений в исходную функцию.

○ Запомните!

При решении рациональных неравенств методом интервалов будем действовать по следующему **алгоритму**:

- ① равносильными преобразованиями исходное неравенство сводят к неравенству, левая часть которого есть выражение вида (1), а правая часть – нуль;
- ② определяют функцию f и находят нули числителя;
- ③ находят значения x , при которых функция не определена (нули знаменателя);
- ④ нули числителя и нули знаменателя делят числовую ось (в общем случае, ОДЗ исходного неравенства) на интервалы;
- ⑤ строят „кривую знаков“;
- ⑥ отбирают интервалы, соответствующие знаку функции f ;
- ⑦ записывают ответ.

Аналогично применяют метод интервалов и при решении неравенств вида $(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) > 0$ (или „ $<$ “, или „ $\geq$ “, или „ $\leq$ “), где $x_1, x_2, \dots, x_n$ – различные действительные числа. Алгоритм решения тот же.

В случаях, когда в выражении вида (1) некоторые из чисел $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m$ равны между собой, то есть функция имеет вид $f(x) = (x - c_1)^{k_1} (x - c_2)^{k_2} \dots (x - c_t)^{k_t}, k_1, k_2, \dots, k_t \in \mathbb{Z}^*$, при построении „кривой знаков“ используют следующее правило:

- если $k_i, i \in \{1, 2, \dots, t \mid t \in \mathbb{N}^*\}$, – четное число, то „при переходе через нуль c_i “ знак функции не меняется;
- если $k_i, i \in \{1, 2, \dots, t \mid t \in \mathbb{N}^*\}$, – нечетное число, то „при переходе через нуль c_i “ знак функции f меняется на противоположный.



Задание с решением

Решим на множестве $\mathbb{R}$ неравенство $\frac{x(3-x)(x+4)^4}{x^2-5x+6} \geq 0$.

Решение:

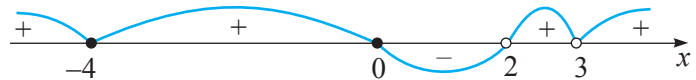
ОДЗ: $x \in \mathbb{R} \setminus \{2; 3\}$.

Преобразуем левую часть неравенства и получим $\frac{x(x-3)(x+4)^4}{(x-2)(x-3)} \leq 0$. Пусть функция f задана формулой $f(x) = \frac{x(x-3)(x+4)^4}{(x-2)(x-3)}$. Значит, нужно найти все значения x , при которых $f(x) \leq 0$.

Находим нули числителя: 0, 3, –4, и нули знаменателя: 2, 3.

Делаем вывод, что функция меняет знак в точках 0 и 2, а в –4 и 3 она не меняет знак.

Получим следующую „кривую знаков“:



Итак, $f(x) \leq 0$ для $x \in [0, 2) \cup \{-4\}$.

Ответ: $S = \{-4\} \cup [0, 2)$.

○ Обобщаем

Множители в (1) могут иметь вид $a_i x + b_i, i \in \mathbb{N}$, и/или $a_j x^2 + b_j x + c_j$, где дискриминант уравнения, ассоциированного трехчлену, отрицателен.

Упражнения и задачи



Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт

А

- Постройте график и определите свойства функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, если:
 - $f(x) = x^2 + 1$;
 - $f(x) = 3x^2 - 1$;
 - $f(x) = -x^2 - 7x - 12$;
 - $f(x) = 3x^2 + 2x - 5$.
- Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:
 - $x^2 - 4x - 21 = 0$;
 - $25z^2 + 10z - 3 = 0$;
 - $t^2 - 4t - 5 = 0$;
 - $x^2 + 2x - 9 = 0$.
- Найдите сумму и произведение решений уравнения, не решая его:
 - $x^2 + 10x + 20 = 0$;
 - $x^2 - 16x + 63 = 0$;
 - $z^2 + 0,6z - 1,2 = 0$;
 - $2t^2 - 3t - 6 = 0$.
- Исследуйте!** Определите знаки решений уравнения, не решая его:
 - $t^2 - 18t + 17 = 0$;
 - $3x^2 - x - 2 = 0$;
 - $2z^2 + z + 0,5 = 0$;
 - $3x^2 + x - 2 = 0$.
- Дано уравнение $2x^2 - x - 1 = 0$ и x_1, x_2 – его решения. Вычислите, не решая уравнение, значение выражения.
 - $x_1^2 + x_2^2$;
 - $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.

В

- Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство:
 - $x^2 - 5x + 6 > 0$;
 - $3x^2 - x + 1 \leq 0$;
 - $-2x^2 - x + 4 \leq 0$;
 - $2x + 7 > 2x^2 + 8x + 11$.
- Работайте в парах!** Найдите промежутки, на которых функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ принимает положительные (отрицательные) значения:
 - $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$;
 - $f(x) = -2x^2 - 4x + \frac{5}{2}$;
 - $f(x) = x^2 + 3x$.
- Решите на множестве $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ систему уравнений:
 - $\begin{cases} x - y = 0, \\ x^2 + y^2 = 10; \end{cases}$
 - $\begin{cases} 2x + y = 1, \\ x^2 - y^2 = -1; \end{cases}$
 - $\begin{cases} x + y = 2, \\ 2x + y^2 = 7; \end{cases}$
 - $\begin{cases} x - 2y = -1, \\ x^2 + 4xy = 0. \end{cases}$
- Даны функции: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 + x - 4$, и $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2x - 4$.
 - Постройте в одной и той же системе координат графики G_f и G_g .
 - Определите свойства функции f функции g .
 - Найдите, при каких значениях x верно неравенство $f(x) \geq g(x)$.
- Работайте в парах!** Даны функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 6x + 5$, и $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x + 5$. Докажите, что графики этих функций имеют общие точки.
- Траекторию мяча можно смоделировать уравнением $y = -3x^2 - 6x + 5$. Найдите максимальную высоту, которую достигнет мяч в полете.
- (ЕАЭ, 2024, предтестирование) Найдите действительные значения a , при которых уравнение $x^2 + (1-a)x - a - 6 = 0$ имеет два действительных решения x_1 и x_2 , удовлетворяющие условию $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 = 19$.
- Длины катетов прямоугольного треугольника равны $x+1$ и $2x-1$. Найдите периметр треугольника, если длина его гипотенузы равна $x-4$.
- Периметр прямоугольного треугольника равен 84 см, а его гипотенуза равна 37 см. Найдите площадь треугольника.
- Участок земли прямоугольной формы, площадью 2080 м^2 , был огражден забором длиной 184 м. Какова длина и ширина участка.
- Моторная лодка прошла 46 км по течению реки и 10 км по озеру за 1 ч 30 мин. Найдите скорость лодки, если скорость течения равна 5 км/ч.
- Одна из сторон прямоугольника на 7 см длиннее другой. Какой может быть длина этой стороны, если площадь прямоугольника меньше, чем 60 см^2 ?
- Определите множество $A = \{t \in \mathbb{Z} \mid 2t^2 - 5t - 3 = 0\}$.
- (ЕАЭ, 2023) Найдите действительные значения a , при которых уравнение $x^2 + ax + 3 - a = 0$ имеет два различных и положительных действительных решения.
- (ЕАЭ, 2024) Найдите наименьшее целое значение a , при котором одно из решений уравнения $x^2 - (2a-6)x + 9 - 6a = 0$ принадлежит промежутку $(1, +\infty)$.



С

21. Фермер хочет оградить участок для животных, имеющий форму равнобедренной трапеции. Боковые стороны трапеции имеют длину 10 м, а большее основание в 1,5 раза длиннее меньшего основания. Какова должна быть длина меньшего основания, чтобы длина изгороди была больше, чем 50 м?
22. (ЕГЭ 2022) Определите наименьшее целое значение a , при котором уравнение $x^2 + (a-8)x + a^2 + 16 = 0$ имеет два различных действительных решения.
23. (ЕГЭ 2023) Дана функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + (p-1)x + q^2 + 2$. Найдите действительные значения p и q , при которых точка $A\left(-\frac{3}{2}; 0\right)$ является вершиной параболы, являющейся графиком функции f .

Реальный профиль

A₁

1. Постройте график и определите свойство функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, если:
- а) $f(x) = x^2 - 5$; б) $f(x) = 3x^2 + 1$; в) $f(x) = -x^2 + 7x + 12$; г) $f(x) = 3x^2 + 2x - 5$.
2.  **Работайте в парах!** Парабола $y = 3x^2$ смещена на 3 единицы вдоль оси Ox и на 2 единицы вдоль оси Oy .
- а) Задайте формулой функцию g , графиком которой является парабола, полученная в результате этих преобразований.
- б) Сколько таких функций можно задать?
- в) Постройте график для каждой полученной функции.
3. Космический корабль запущен с начальной скоростью 100 м/с. Зависимость между пройденным расстоянием h и временем t задана функцией $h(t) = 100t - 4,9t^2$. Какое расстояние пролетел корабль за первые 10 секунд?
4. Найдите длины сторон прямоугольника с максимальной площадью, если его периметр равен 20 см.



B₁

5. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение: а) $|x^2 - 5x + 4| = 2$; б) $|x(x-3)| = 4$.
6. Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство: а) $x^2 - 3|x| - 4 \leq 0$; б) $|x| \cdot |x-1| \geq 20$; в) $|x-1| \cdot |x-2| < 6$.
7. Запишите уравнение окружности с центром $A(4, 5)$, касающейся прямой $y = 2x + 3$.
8. Мяч, подброшенный вверх с начальной скоростью 72 м/с, будет находиться через t секунд на высоте $h(t) = 72t - 4,9t^2$ (от поверхности Земли).
- а) Найдите высоту, на которой будет находиться мяч через 5 с.
- б) Через сколько секунд мяч упадет на Землю?
9.  **Работайте в парах!** Найдите область определения функции $f: D \rightarrow \mathbb{R}$:
- а) $f(x) = \frac{x-2}{x^2-5x+6}$; б) $f(x) = \sqrt{x^2 - |x|}$;
- в) $f(x) = \sqrt{x^2 + x} - \sqrt{9 - x^2}$; г) $f(x) = \frac{1}{x+4} - \sqrt{x^2 - 3x - 4}$.
10. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение: а) $\frac{x^2+1}{x} + \frac{x}{x^2+1} = \frac{5}{2}$; б) $\frac{x^2+2}{3x-2} - \frac{3x-2}{x^2+2} = \frac{8}{3}$.
11. Решите на множестве $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ систему уравнений: а) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6}, \\ 2x - 5 = y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y = 14, \\ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{25}{12}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{5}{6}, \\ x - y = 2. \end{cases}$
12. Решите на множестве $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ систему уравнений: а) $\begin{cases} x^2 y^2 + xy - 72 = 0, \\ x + y - 6 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (x+y)^2 - 2(x+y) = 15, \\ x + xy + y = 11. \end{cases}$
13.  **Исследуйте!** При каких действительных значениях m система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ x - y = m \end{cases}$
- а) имеет единственное решение; б) имеет два решения; в) несовместна?

14. Одна из сторон прямоугольника на 5 см меньше другой. Какой может быть длина этой стороны, если площадь прямоугольника меньше 50 см^2 ?

15.  **Работайте в группах!** Решите на множестве $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ систему уравнений: а) $\begin{cases} x + y = -4, \\ xy = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - y = 1, \\ x^2 + y^2 = 41. \end{cases}$

16. Решите методом разложения на множители систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 5, \\ (x - y)^2 = 9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - xy = -2, \\ (x + y)^2 = 16; \end{cases}$ в) $\begin{cases} |3x - 1| - y = 0, \\ x + xy = 1. \end{cases}$

17. Решите задачу, составив систему уравнений.

Из одного порта одновременно отправились два теплохода, один на юг, а другой – на запад, двигаясь прямолинейно и равномерно. Через два часа расстояние между ними составило 60 км. Найдите скорость каждого теплохода, если скорость одного из них на 6 км/ч больше скорости другого.

18. Решите графически систему, а затем аналитически проверьте ее решения:

а) $\begin{cases} x^2 - 4x - 6y = 20, \\ xy = -8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - 8x - 4y = 6, \\ y^2 + 5y - 5x = 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 36, \\ x^2 + 6y = 36. \end{cases}$

19. а) Запишите уравнение окружности, проходящей через точки $A(2, 0)$, $B(5, 0)$ и касающейся оси Oy .

б) Найдите координаты точек пересечения парабол $y = -2x^2 - x - 6$ и $y = x^2 - 2$.

в) Найдите координаты точек пересечения гиперболы $yx = 2$ и окружности $x^2 + y^2 = 4$.

20. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $|x - 1| - 3|x + 4| = x$; б) $||2x + 1| - 2x| = 3|x + 2|$; в) $\frac{9}{|3x - 1| - 8} = |3x - 1|$.

21.  **Работайте в группах!** Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство:

а) $|x^2 - 9x + 18| + x \geq 5$; б) $|2x - 3| > |x - 5| - 3|2 - x|$; в) $|x - 4| \geq |x + 2|$;
г) $\frac{|x| \cdot (2 - |x - 1|)}{(x - 1)^3} > 0$; д) $|2x^2 - x - 1| \leq 0$; е) $|1 - 3x| \cdot |x^2 - x| > 0$.

22. Решите на множестве $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ однородную систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = -1, \\ 3x^2 - xy + 3y^2 = 13; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + xy = 0, \\ 2x^2 + xy - y^2 = 1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 17, \\ x^2 - 2xy = -3. \end{cases}$

23.  **Работайте в парах!** Решите на множестве $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ симметрическую систему уравнений:

а) $\begin{cases} x + y + xy = 23, \\ x^2 + y^2 = 34; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + y = 2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} xy = 2, \\ x^2 + y^2 = 12. \end{cases}$

Решите систему в) несколькими методами.

24. Решите задачу, составив систему уравнений.

а) Два завода должны по плану совместно изготовить за месяц 360 деталей. Первый завод перевыполнил план на 12%, а второй – на 10%. Всего оба завода изготовили 400 деталей. Сколько деталей изготовил каждый завод сверх плана?

б) Для изготовления электрического мотора типа А необходимы 2 кг меди и 1 кг олова, а для изготовления электрического мотора типа В – 3 кг меди и 2 кг олова. Сколько моторов каждого типа изготовили, если всего было использовано 130 кг меди и 80 кг олова?

25. При сжигании в избытке кислорода 1,10 г смеси метана и этанола образовалось 0,896 л оксида углерода (IV), измеренного при нормальных условиях. Определите количественный состав смеси в массовых долях.

а) Решите задачу с помощью системы уравнений.

б) Решите задачу с помощью уравнения.

26. Дана система уравнений $\begin{cases} xy = 4, \\ x^2 + y^2 = 17. \end{cases}$ Решите эту систему на множестве $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ тремя методами.



27. В раствор, содержащий 40 г соли, долили 200 г воды, после чего концентрация раствора уменьшилась на 10%. Какое количество воды в граммах содержал раствор первоначально и какова была концентрация этого раствора?

28. ( 2024, предтестирование) Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство $\frac{2}{x-1} \leq x$.

C₁

29. По новому графику движения автобус проехал 335 км на 45 минут быстрее, чем по предыдущему графику. Найдите среднюю скорость движения автобуса по новому графику, если известно, что его скорость на 10 км/ч больше, чем его средняя скорость по предыдущему графику.

30. Найдите действительные значения параметра a , при которых неравенство $x^2 - (4a+1)x + (a+2)(3a-1) > 0$ имеет решения для любого $x < 0$.

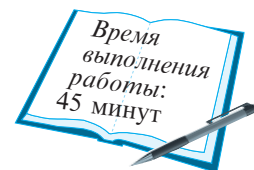
31*. Найдите действительные значения параметра a , при которых неравенство $x + \frac{7a^2 + a - 2}{x + a + 1} < 7a - 1$ не имеет положительных решений.

32. Пусть дана окружность $x^2 + y^2 = 9$. Запишите уравнение окружности, проходящей через начало прямоугольной системы координат, точку $A(1, 0)$, которая касается заданной окружности.



Итоговый тест I

Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт



1. Дополните, чтобы полученное высказывание стало истинным:

$$\begin{cases} 3x - 2y = -3, \\ x^2 - xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{}, \\ x^2 - xy = 1. \end{cases}$$

2. Дано уравнение $-3x^2 - x + 2 = 0$.

а) Найдите действительные решения уравнения.

б) Составьте уравнение второй степени, решениями которого являются противоположные значения решений исходного уравнения.

3. Дана функция $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$.

а) Найдите $D(f)$.

б) Определите, при каких действительных значениях x функция f принимает неотрицательные значения.

4. Букет из 3 тюльпанов и 4 нарциссов стоит 44 лей, а букет из 6 тюльпанов и 3 нарциссов стоит 63 лей. Сколько стоит один тюльпан и сколько один нарцисс?



Реальный профиль

1. Решите на множестве $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ систему уравнений $\begin{cases} x - y + xy = 3, \\ xy^2 - x^2y = -2. \end{cases}$

2. Дана функция $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 10x + 25}}{x - 5} + \frac{1}{x}$.

а) Найдите $D(f)$.

б) Постройте график функции f .



3. С вокзалов А и В, расположенных на расстоянии 600 км, навстречу друг другу одновременно отправляются два поезда. Через 6 ч расстояние между ними составляло 60 км. Если бы поезд из А отправился на 1 ч 30 мин раньше поезда из В, то они бы встретились на середине пути между А и В. Найдите скорость каждого поезда.



4. Дана система $\begin{cases} \frac{x}{x^2 - 1} \geq 0, \\ -3x^2 + \boxed{} < 0. \end{cases}$

а) Впишите такое действительное число, чтобы множество решений системы совпало с множеством решений первого неравенства.

б) Решите на множестве $\mathbb{R}$ полученную систему.

§3 Функция радикал. Степенная функция. Иррациональные уравнения. Иррациональные неравенства

3.1. Функция радикал



определение

Функциями радикал называются функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[n+1]{x}$, и $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, $g(x) = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

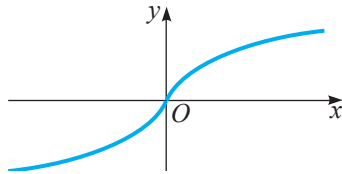
Пример

$f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_1(x) = \sqrt[3]{x}$, и $f_2: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, $f_2(x) = \sqrt[4]{x}$, – функции радикал.

Основные свойства функции радикал

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[n+1]{x}$$

- 1° $D(f) = \mathbb{R}$.
- 2° У функции f единственный нуль: $x_1 = 0$.
Точкой пересечения графика G_f с осью Oy является точка $O(0; 0)$.
- 3° $f(x) > 0$ при $x \in (0, +\infty)$;
 $f(x) < 0$ при $x \in (-\infty, 0)$.
- 4° Функция f – нечетная:
 $f(-x) = \sqrt[n+1]{-x} = \sqrt[n+1]{-1} \cdot \sqrt[n+1]{x} = -f(x)$.
- 5° Функция f строго возрастает на множестве $\mathbb{R}$ (вытекает из свойства 7° радикалов).
- 6° Функция f не является периодической, поскольку она строго монотонна на бесконечном промежутке.
- 7° Функция f не имеет локальных экстремумов, так как она строго монотонна на бесконечном промежутке.
- 8° Функция f обратима. Обратной функцией к f является $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = x^{2n+1}$.
- 9° График функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[n+1]{x}$, $n \in \mathbb{N}^*$:



$$g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, g(x) = \sqrt[n]{x}$$

- 1° $D(g) = \mathbb{R}_+$.
- 2° У функции g единственный нуль: $x_1 = 0$.
Точкой пересечения графика G_g с осью Oy является точка $O(0; 0)$.
- 3° $g(x) > 0$ при $x \in (0, +\infty)$;
функция g не принимает отрицательные значения.
- 4° Функция g не является ни четной, ни нечетной, поскольку множество $D(g) \subset \mathbb{R}$ не симметрично относительно O .
- 5° Функция g строго возрастает на множестве $\mathbb{R}_+$.
- 6° Функция g не является периодической.
- 7° Функция g не имеет локальных экстремумов.
- 8° Функция g обратима. Обратной функцией к g является $g^{-1}: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, $g^{-1}(x) = x^{2n}$.
- 9° График функции $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, $g(x) = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}^*$:

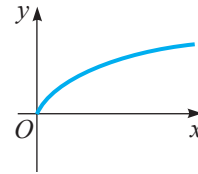


Рис. 7.7



Задание

- а) Постройте графики функций $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_1(x) = x^{2n+1}$, и $g_1: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, $g_1(x) = x^{2n}$.
- б) Сравните свойства функций f_1 и g_1 со свойствами функций f и g соответственно.

3.2. Степенная функция с действительным показателем



определение

Степенной функцией с действительным показателем называется функция вида $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

Основные свойства степенной функции

- 1° Областью определения степенной функции f является $\mathbb{R}_+^*$, поскольку степень с действительным показателем рассматривается только для положительного основания.
- 2° Из свойств степени следует, что на $\mathbb{R}_+^*$ функция f строго возрастает при $\alpha > 0$ и строго убывает при $\alpha < 0$.
- 3° Функция f не является ни четной, ни нечетной. (Обоснуйте!)

4° Функция f не является периодической и не имеет точек локального экстремума, поскольку она монотонна на $D(f)$.

5° График степенной функции строится в зависимости от значений показателя степени. Возможны следующие виды графиков степенной функции (рис. 7.8):

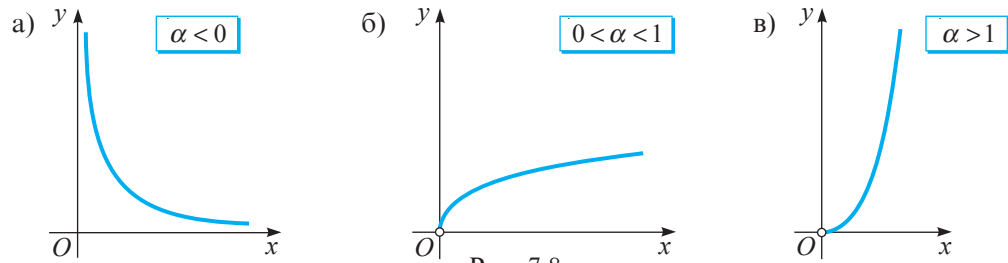


Рис. 7.8

Замечание

Функции, заданные формулами $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ и $g(x) = \sqrt[n]{x}$, где n – нечетное натуральное число, различны, потому что различны их области определения: $D(f) = \mathbb{R}^*$, а $D(g) = \mathbb{R}$.

3.3. Обратная пропорциональность

Вспомним

Зависимость между двумя величинами x и y , заданная таким образом, что при увеличении (уменьшении) величины x величина y уменьшается (увеличивается) во столько же раз, называется обратной пропорциональностью.

Обратная пропорциональность между величинами выражается соотношением $x \cdot y = k$, где $k \in \mathbb{R}^*$ и $x \in (0, +\infty)$.

Определение

Функция вида $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$, $f(x) = \frac{k}{x}$, $k \in \mathbb{R}^*$, называется **обратной пропорциональностью**.

Запомните!

Графиком обратной пропорциональности является гипербола, состоящая из двух ветвей:

- а) при $k > 0$ ветви расположены в I и III четвертях (рис. 7.9);
- б) при $k < 0$ ветви расположены в II и IV четвертях (рис. 7.10).

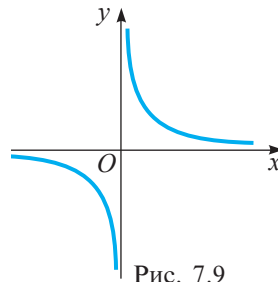


Рис. 7.9

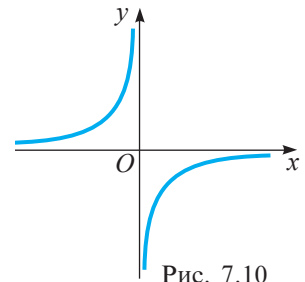


Рис. 7.10

Вспомним



Исследуем

Используя график обратной пропорциональности (рис. 7.9 и 7.10), определите свойства функции вида $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$, $f(x) = \frac{k}{x}$, $k \in \mathbb{R}^*$.

Упражнения и задачи



Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт

A



1. **Исследуйте!** Даны точки $A(-1; 0)$, $B(-1; -1)$, $C(0; 0)$, $D(4; 2)$, $E(8; 2)$, $F(-2; 1)$.

Определите, какие из этих точек принадлежат графику функции:

- а) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$; б) $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$; в) $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$, $f(x) = -\frac{2}{x}$.

- 2. а) Постройте в одной и той же системе координат графики функций $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$, $f(x) = \frac{2}{x}$ и $g: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$, $g(x) = -\frac{2}{x}$.
- б) Определите свойства функций f и g .

3. Дана функция радикал $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, $f(x) = \sqrt{x}$.
Найдите значения функции f при $x \in \{-16; -4; 0; 2; 8; 44; 64; 144\}$.
4. Дана функция радикал $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$.
Найдите значения функции f при $x \in \{-27; -8; -1; 0; 1; 8; 27; 64; 1000\}$.
5. Дана функция $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$, $f(x) = -\frac{1}{2x}$. Найдите значения функции f при $x \in \{-5; -3; -\frac{1}{2}; 0; \sqrt{2}; 4,5; 10\}$.

В

6. Задайте формулой обратную пропорциональность, зная, что ее график проходит через точку:
а) $A(-2; 6)$; б) $B(9; 3)$; в) $C(1; -5)$; г) $D(-1; -10)$.
7.  **Работайте в парах!** Запишите формулу, задающую зависимость объема куба от длины его ребра:
а) Постройте график функции, определяемой этой формулой. Является ли эта зависимость обратной пропорциональностью?
б) Найти объем куба, зная, что длина его ребра равна: а) 2 см; б) 0,5 см; в) 1,5 см.
в) Решите графическим методом уравнение $x^3 = -x - 2$.
8. а) Запишите формулу, выражающую зависимость скорости v от времени t , учитывая расстояние d .
б) Докажите, что эта зависимость является обратной пропорциональностью.
9. ( 2023) Дана функция $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2}{x}$. Определите принадлежность точки $M(\sqrt{3} - 1; \sqrt{3} + 1)$ графику функции f .

С

10. ( 2022) Даны функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 4x - 7$ и $g: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = -\frac{6}{x}$. Покажите, что вершина параболы, являющейся графиком функции f , принадлежит графику функции g .
11. Постройте график функции:
а) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{|x|}$; б) $g: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$, $g(x) = \frac{2}{|x|}$.
12.  **Исследуйте!** Приведите примеры обратных пропорциональностей из различных областей.

Реальный профиль

А₁

1. Найдите область определения функции $f: D \rightarrow \mathbb{R}$: а) $f(x) = \sqrt{x-3}$; б) $f(x) = \sqrt[3]{x+3}$.
2. Постройте график функции: а) $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{2x}$; б) $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{1-4x}$.
3. Исследуйте на четность или нечетность функцию $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: а) $f(x) = x^4$; б) $f(x) = x^5$.

В₁

4. Найдите сумму и произведение функций $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$:
а) $f(x) = x^4$, $g(x) = x^5$; б) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $g(x) = \sqrt{x}$.
5.  **Работайте в парах!** Пользуясь определением монотонности, найдите промежутки монотонности функции $f: D \rightarrow \mathbb{R}$:
а) $f(x) = x^2 + 2$; б) $f(x) = (x+2)^2$; в) $f(x) = x^{\frac{1}{3}} + 4$; г) $f(x) = (x+4)^{\frac{1}{3}}$.

С₁

6. Докажите, что функция $f: D \rightarrow E$ обратима, и найдите соответствующую ей обратную функцию:
а) $f: \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{R}_+$, $f(x) = x^4$; б) $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, $f(x) = \sqrt{4x}$; в) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{4}}$.
- 7*. Найдите сумму, произведение и композицию $f \circ g$ функций $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:
а) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $g(x) = x^3$; б) $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt[3]{x}$.

3.4. Иррациональные уравнения

Задача

У фермера два участка земли квадратной формы. Площадь одного из них на 32 сотни меньше другого. Найдите площадь каждого участка, если известно, что общая длина ограды равна 320 м.

Решение:

Пусть x м² – площадь первого участка, тогда $(x - 3200)$ м² – площадь второго участка. Согласно условию задачи, получаем уравнение $4\sqrt{x} + 4\sqrt{x - 3200} = 320$. Это уравнение называется иррациональным.

Назовем **иррациональным уравнением** такое уравнение, в котором неизвестное содержится под знаком корня или в основании степени с рациональным показателем.

Например, $\sqrt[3]{x} - \sqrt{x+1} = 2$, $x^{\frac{3}{2}} + 4x^{\frac{1}{2}} + 3 = 0$ – иррациональные уравнения.

О Запомните!

При решении иррациональных уравнений в результате некоторых преобразований возможно появление посторонних решений.

Например, в результате возведения обеих частей уравнения $f(x) = g(x)$ в четную натуральную степень можем получить посторонние решения. Поэтому, когда выполненные преобразования не сохраняют равносильность уравнений, необходима проверка.

Задание с решением

Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $\sqrt{4-x} = -x-2$.

Решение:

Возведя обе части уравнения в квадрат, получаем: $4-x = x^2 + 4x + 4 \Leftrightarrow x^2 + 5x = 0$. Находим, $x_1 = -5$, $x_2 = 0$.

Проверкой в исходном уравнении убеждаемся, что -5 является решением, а 0 не является решением данного уравнения (это решение уравнения $\sqrt{4-x} = x+2$).

О Запомните!

Напомним, если обе части уравнения $f(x) = g(x)$ одного знака при любом $x \in \text{ОДЗ}$, то для всех $n \in \mathbb{N}^*$ уравнения $f(x) = g(x)$ и $(f(x))^n = (g(x))^n$ равносильны на ОДЗ.

Решение иррациональных уравнений основано на следующей теореме:

Теорема 3

Для любого $n \in \mathbb{N}^*$ уравнение $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$ равносильно системе $\begin{cases} f(x) = (g(x))^{2n}, \\ g(x) \geq 0, \end{cases}$
а уравнение $\sqrt[2n+1]{f(x)} = g(x)$ равносильно уравнению $f(x) = (g(x))^{2n+1}$.



Задание

Докажите теорему 3.

Задание с решением

Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $\sqrt{1-x^2} = x+1$.

Решение:

$$\sqrt{1-x^2} = x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0, \\ 1-x^2 = (x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1; \\ x = -1, \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, \\ x = 0. \end{cases}$$

Ответ: $S = \{-1; 0\}$.

Отметим, что уравнения $f(x) = g(x)$ и $f(x) = -g(x)$ имеют одну и ту же ОДЗ. Поэтому, решив заданное уравнение методом возведения обеих частей в четную натуральную степень и убедившись, что найденное решение x_0 принадлежит его ОДЗ, мы еще не можем утверждать, что x_0 является решением заданного уравнения. Однако, если $x_0 \notin \text{ОДЗ}$ заданного уравнения, то x_0 является посторонним решением этого уравнения.



О Запомните!

Посторонние решения также могут появляться в результате выполнения некоторых подстановок.



Задание с решением

Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{3x+1} = \sqrt[3]{x-1}$ (1).

Решение:

Возведем в куб обе части уравнения (1) и получим уравнение:

$$\sqrt[3]{(x+1)(3x+1)}(\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{3x+1}) = -(x+1) \quad (2), \text{ равносильное заданному.}$$

Учитывая уравнение (1), заменим в (2) выражение из скобок выражением $\sqrt[3]{x-1}$ и получим $\sqrt[3]{(x+1)(3x+1)}\sqrt[3]{x-1} = -(x+1)$ (3). Возведем обе части уравнения (3) в куб и получим уравнение $(x+1)(3x+1)(x-1) + (x+1)^3 = 0$, имеющее решения $x_1 = -1$, $x_2 = 0$.

При подстановке найденных значений x в заданном уравнении убеждаемся, что его решением является только -1 .

Ответ: $S = \{-1\}$.

При возведении обеих частей уравнения (1) в куб получили уравнение (2), равносильное заданному. Однако последующая замена выражения $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{3x+1}$ на выражение $\sqrt[3]{x-1}$ привела к появлению постороннего решения.



Замечание

Проверка является необходимой частью решения иррационального уравнения, кроме случаев, когда все уравнения, полученные в процессе решения, являются равносильными заданному на ОДЗ исходного уравнения.

О Запомните!

Один из общих методов решения иррациональных уравнений состоит в сведении их к уравнениям (системам, содержащим как уравнения, так и неравенства) без радикалов, равносильным заданному иррациональному уравнению. При применении этого метода проверка не обязательна.



Задание с решением

Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $\sqrt{2x+3} = x$.

Решение:

$$\sqrt{2x+3} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ 2x+3 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ \begin{cases} x = -1, \\ x = 3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

Ответ: $S = \{3\}$.

Иногда применение этого метода усложняет процесс решения, поэтому в таких случаях используют другие методы (теорему 3 или ниже рассмотренные методы).

Если нахождение ОДЗ или решение неравенства $g(x) \geq 0$ сложнее, чем само решение иррационального уравнения, то не нужно находить ОДЗ и решать неравенство $g(x) \geq 0$, а только проверить, удовлетворяют ли полученные решения этим условиям.

Иногда нахождением ОДЗ завершается решение заданного уравнения.



Задание с решением

Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $\sqrt{x} + \sqrt{2-x} = \sqrt{x-3}$.

Решение:

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x \geq 0, \\ 2-x \geq 0, \\ x-3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3, \\ x \leq 2. \end{cases}$$

Эта система неравенств не имеет решений, следовательно, и исходное неравенство не имеет решений.

Ответ: $S = \emptyset$.

Рассмотрим некоторые методы, часто применяемые при решении иррациональных уравнений.

1 Метод возведения обеих частей уравнения в одну и ту же натуральную степень

Как правило, этот метод используется при решении уравнений вида:

$$\sqrt[k]{f(x)} = g(x); \sqrt[k]{f(x)} \pm \sqrt[k]{g(x)} = h(x); \sqrt[k]{f(x)} \pm \sqrt[k]{g(x)} = \sqrt[k]{h(x)}, k \in \mathbb{N}, k \geq 2.$$

Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $\sqrt{x+1} + \sqrt{3x+1} = 8$.

Решение:

Находим ОДЗ: $\begin{cases} x+1 \geq 0, \\ 3x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{3}, +\infty\right).$

Уединяя один радикал и возведя обе части в квадрат, получим:

$$(\sqrt{x+1})^2 = (8 - \sqrt{3x+1})^2 \Leftrightarrow x+32 = 8\sqrt{3x+1}.$$

После возведения в квадрат обеих частей последнего уравнения получим квадратное уравнение $x^2 - 128x + 960 = 0$, имеющее решения $x_1 = 8$, $x_2 = 120$.

Выполним проверку, так как преобразования не были равносильными.

Значения $x_1, x_2 \in \text{ОДЗ}$. Значит, оба значения могут быть решениями исходного уравнения. Подстановкой в заданном уравнении убеждаемся, что 8 является решением исходного уравнения, а 120 таковым не является.

Ответ: $S = \{8\}$.

2 Решение уравнений вида $f(x)^2 \sqrt[k]{g(x)} = 0, k \in \mathbb{N}^*$

На ОДЗ это уравнение равносильно системе $\begin{cases} g(x) \geq 0; \\ f(x) = 0, \\ g(x) = 0. \end{cases}$

Пример

Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $(x^2 - 4x + 3)\sqrt{4 - x^2} = 0$.

Решение:

$$(x^2 - 4x + 3)\sqrt{4 - x^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - x^2 \geq 0; \\ x^2 - 4x + 3 = 0, \\ 4 - x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2, \\ x = 1, \\ x = 2. \end{cases} \quad \text{Ответ: } S = \{-2; 1; 2\}.$$

3 Метод введения вспомогательных неизвестных

а) Использование одного вспомогательного неизвестного

Этим методом некоторые иррациональные уравнения сводятся к уравнениям без радикалов.

Пример

Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $3x^2 + 15x + 2\sqrt{x^2 + 5x + 1} = 2$.

Решение:

$$3x^2 + 15x + 2\sqrt{x^2 + 5x + 1} = 2 \Leftrightarrow 3(x^2 + 5x + 1) + 2\sqrt{x^2 + 5x + 1} - 5 = 0.$$

Пусть $\sqrt{x^2 + 5x + 1} = t \geq 0$. Получим уравнение $3t^2 + 2t - 5 = 0$, имеющее решения $t_1 = 1, t_2 = -\frac{5}{3}$. Так как $t_2 = -\frac{5}{3} < 0$, то решаем только уравнение $\sqrt{x^2 + 5x + 1} = 1$, которое имеет решения $x_1 = 0, x_2 = -5$.

Проверка не обязательна, поскольку выполненные преобразования являются равносильными.

Ответ: $S = \{-5; 0\}$.

б) Использование двух вспомогательных неизвестных

При решении некоторых иррациональных уравнений удобнее использовать два вспомогательных неизвестных. Этот метод позволяет свести иррациональное уравнение к системе уравнений, не содержащих радикалы.

Этот метод применим при решении уравнений, содержащих два радикала.



Пример

Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $\sqrt[3]{x} + \sqrt{x+1} = 1$.

Решение:

ОДЗ: $x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-1, +\infty)$.

Пусть $\begin{cases} \sqrt[3]{x} = u, \\ \sqrt{x+1} = v. \end{cases}$ (*) Тогда исходное уравнение записывается в виде $u + v = 1$.

Чтобы получить еще одно уравнение с неизвестными u и v , возведем в третью степень обе части уравнений системы (*). Получим систему $\begin{cases} x = u^3, \\ x+1 = v^2, \end{cases}$ откуда $u^3 - v^2 = -1$.

Итак, получили систему уравнений $\begin{cases} u^3 - v^2 = -1, \\ u + v = 1. \end{cases}$ Решив систему, получим решение $\begin{cases} u = 0, \\ v = 1. \end{cases}$ (Проверьте!)

Для нахождения решений исходного уравнения решим систему $\begin{cases} \sqrt[3]{x} = 0, \\ \sqrt{x+1} = 1. \end{cases}$

Получим решение $x = 0 \in \text{ОДЗ}$. Проверкой устанавливаем, что 0 является решением исходного уравнения.

Ответ: $S = \{0\}$.

4 Решение уравнений вида $^{2k+1}\sqrt{f(x)} = g(x)$, $k \in \mathbb{N}^*$

Для любых $k \in \mathbb{N}^*$ это уравнение (согласно теореме 3) равносильно уравнению $f(x) = (g(x))^{2k+1}$.

Пример

Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $\sqrt[3]{x^3 + x^2 + x - 12} = x$.

Решение:

ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$. $\sqrt[3]{x^3 + x^2 + x - 12} = x \Leftrightarrow x^3 + x^2 + x - 12 = x^3 \Leftrightarrow x^2 + x - 12 = 0$, откуда $x_1 = -4$, $x_2 = 3$.

Ответ: $S = \{-4; 3\}$.

5 Специальные методы решения иррациональных уравнений

а) Метод умножения обеих частей уравнения на сопряженное выражение

Пример

Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $\sqrt{x^2 - 3x + 3} + \sqrt{x^2 - 3x + 6} = 3$ (**).

Решение:

Умножив обе части уравнения (**) на выражение

$\varphi(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 3} - \sqrt{x^2 - 3x + 6}$, получим:

$$\begin{aligned} x^2 - 3x + 3 - x^2 + 3x - 6 &= 3(\sqrt{x^2 - 3x + 3} - \sqrt{x^2 - 3x + 6}) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 3x + 3} - \sqrt{x^2 - 3x + 6} = -1. \end{aligned} \quad (***)$$

Сложив уравнения (**) и (***), получим уравнение $\sqrt{x^2 - 3x + 3} = 1$.

Значит, $x^2 - 3x + 3 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$, откуда $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

Подставив значения 1 и 2 в исходное уравнение, убеждаемся в том, что оба значения являются его решениями.

Ответ: $S = \{1; 2\}$.

Замечание

Как правило, этот метод применяется при решении иррациональных уравнений вида $\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)} = h(x)$.

б) Метод выделения полного квадрата (куба и т. д.) в подкоренных выражениях
Пример

 Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = x-1$.

Решение:

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = x-1 \Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} = x-1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |\sqrt{x-1}+1| + |\sqrt{x-1}-1| = x-1 \Leftrightarrow \sqrt{x-1}+1 + |\sqrt{x-1}-1| = x-1.$$

 Пусть $\sqrt{x-1}=t$, $t \geq 0$. Тогда получим уравнение $t+1+|t-1|=t^2$.

 Решив это уравнение известными методами (учитывая, что $\sqrt{x-1}=t$, $t \geq 0$), получим: $t=2$, и получим решение исходного уравнения $x=5$.

 Ответ: $S=\{5\}$.

Как правило, решение иррационального уравнения может быть найдено несколькими методами. Опыт подскажет, какой из них более эффективен для заданного уравнения.

Замечание
Упражнения и задачи


Реальный профиль

A₁

 1. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

- а) $\sqrt{x+1}=1$; б) $\sqrt{x-1}=-7$; в) $\sqrt{x+2}=x$;
 г) $\sqrt{x^2-3x+4}-x=2$; д) $\sqrt{17+2x-3x^2}=x+1$; е) $\sqrt{x^2+2x+10}=2x-1$.

 2. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

- а) $\sqrt{x}=x+1$; б) $\sqrt{x+3}=x-1$; в) $\sqrt{5-x}+\sqrt{x-6}=x$; г) $\sqrt{2x+5}-\sqrt{3x-5}=2$.

 3. **Работайте в парах!** Впишите действительное число, затем решите на множестве $\mathbb{R}$ полученное уравнение: а) $\sqrt{1-2x} = \square \cdot x+1$; б) $\sqrt{\square \cdot x+2} = 1-3x$; в) $\sqrt{0,5x-\square} = x+2$.

 4. **Исследуйте!** Определите истинностное значение высказывания $\sqrt[3]{x^2}=1 \Leftrightarrow x^{\frac{2}{3}}=1$.

B₁

 5. а) (2022) Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $\sqrt{4-x}=x-2$.

 б) (2015) Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $\sqrt{2x+3}=x$.

 6. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

- а) $(1-x^2)\sqrt{2x-5}=0$;
 б) $(3x^2-x-2)\sqrt{1-4x}=0$;
 в) $(1-3x)\sqrt{x^2-2x+1}=0$;
 г) $(x^2-5x+6)\sqrt{2x^2-x-3}=0$;
 д) соответствующее задаче, сформулированной в начале п. 3.3, а затем ответьте на вопрос задачи.

 7. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

- а) $\sqrt{5x-1}-\sqrt{3x-2}=\sqrt{x-1}$;
 б) $\sqrt{x+6}=\sqrt{x+7}-\sqrt{2x-5}$;
 в) $\sqrt[3]{x-5}=x+1$;
 г) $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}$.

 8. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

- а) $(x^3-1)\sqrt{x^2-7x+12}=0$; б) $(2x^2-x-1)\sqrt{x^2-64}=0$.

 9. Используя вспомогательное неизвестное, решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

- а) $x^2+\sqrt{x^2+2x+8}=12-2x$; б) $x-5\sqrt{x}+6=0$;
 в) $x^{\frac{3}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}+1=0$.

 10. Методом умножения обеих частей уравнения на соответствующее сопряженное выражение решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

- а) $\sqrt{x^2-2x-4}+\sqrt{x^2+3x-1}=4$;
 б) $\sqrt{x^2+9}-\sqrt{x^2-7}=2$.

 11. **Работайте в парах!** Используя два вспомогательных неизвестных, решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

- а) $2\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}=2$; б) $\sqrt[3]{12-x}+\sqrt[3]{14+x}=2$;
 в) $\sqrt[3]{x+24}+\sqrt{12-x}=6$.

12. Применяя наиболее эффективный метод, решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $\sqrt{x+3} + \sqrt{x+4} = \sqrt{x+2} + \sqrt{x+7}$;

б) $\sqrt{\frac{20+x}{x}} + \sqrt{\frac{20-x}{x}} = \sqrt{6}$;

в) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = 2$;

г) $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1$;

д) $\sqrt[3]{9-\sqrt{x+1}} + \sqrt[3]{7+\sqrt{x+1}} = 4$;

е) $(x+4)(x+1) - 3\sqrt{x^2+5x+2} = 6$.

13*. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение: а) $\sqrt[4]{(x+1)^2} + \sqrt[4]{(x-1)^2} = 4 \cdot \sqrt[4]{x^2-1}$; б) $\frac{4}{x+\sqrt{x^2+x}} - \frac{1}{x-\sqrt{x^2+x}} = \frac{3}{x}$.

14. Составьте иррациональное уравнение, которое:

- а) не имеет решений; б) имеет одно решение; в) имеет два решения.

15. Составьте иррациональное уравнение, решениями которого являются числа 4 и -1.

16*.  **Исследуйте!** Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение, где a – действительный параметр:

а) $\sqrt[3]{(a+x)^2} + 4 \cdot \sqrt[3]{(a-x)^2} = 5 \cdot \sqrt[3]{a^2-x^2}$;

б) $\sqrt{x+a} = a - \sqrt{x}$.

17. ( 2012) Найдите действительные значения параметра m , при которых уравнение

$\sqrt{x^2-2mx+m^2+m} = \sqrt{2m-x}$ имеет единственное действительное решение.

3.5. Иррациональные неравенства

Задача

Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство $x - 3\sqrt{x} - 4 \leq 0$.

Это неравенство является иррациональным.

Будем называть **иррациональным неравенством** такое неравенство, в котором неизвестное содержится под знаком корня или в основании степени с рациональным показателем.

Например, $x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{2}} - 2 \geq 0$, $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} < 1$, $\sqrt{x-1} \geq 2$, $\sqrt{x+1} \leq -2$ – иррациональные неравенства.

Иррациональные неравенства решаются с использованием приемов и методов, аналогичных применяемым при решении иррациональных уравнений.

При решении иррациональных неравенств будем выполнять равносильные преобразования, учитывая следующие утверждения:

- I Если n – нечетное натуральное число, то неравенство $f(x) < g(x)$ равносильно неравенству $(f(x))^n < (g(x))^n$.
- II Если функции f и g неотрицательны на множестве M и n – ненулевое натуральное число, то неравенство $f(x) < g(x)$ равносильно неравенству $(f(x))^n < (g(x))^n$ на множестве M .
- III Если функции f и g отрицательны на множестве M и $n, n \in \mathbb{N}^*$, – четное число, то неравенство $f(x) < g(x)$ равносильно неравенству $(f(x))^n > (g(x))^n$ на множестве M .

Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство:

а) $\sqrt{x-1} < 3$; б) $\sqrt{x-1} \geq 3$; в) $\sqrt{x-1} > -3$; г) $\sqrt{x-1} \leq -3$.

Решение:

а) $\sqrt{x-1} < 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0, \\ (\sqrt{x-1})^2 < 3^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1, \\ x-1 < 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1, \\ x < 10 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x < 10. \text{ Ответ: } S = [1, 10].$

б) $\sqrt{x-1} \geq 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0, \\ (\sqrt{x-1})^2 \geq 3^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1, \\ x \geq 10 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 10. \text{ Ответ: } S = [10, +\infty).$

в) $\sqrt{x-1} > -3 \Leftrightarrow x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1. \text{ Ответ: } S = [1, +\infty).$

г) $\sqrt{x-1} \leq -3 \Leftrightarrow S = \emptyset. \text{ Ответ: } S = \emptyset.$

3 замечание

Задание с решением

Рассмотрим основные методы решения некоторых видов иррациональных неравенств.

1 Иррациональные неравенства вида $\sqrt{f(x)} < g(x)$

Учитывая свойства корней (радикалов) и неравенств, имеем:

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) \geq 0, \\ f(x) < g^2(x). \end{cases}$$

2 Иррациональные неравенства вида $\sqrt{f(x)} > g(x)$

Используя свойства корней и неравенств, получаем:

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0; \\ g(x) \geq 0, \\ f(x) \geq 0, \\ f(x) > g^2(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0; \\ g(x) \geq 0, \\ f(x) > g^2(x). \end{cases}$$

Замечание

Из второй системы исключено неравенство $f(x) \geq 0$, так как оно следует из третьего неравенства этой системы.

Задание с решением

Решим на множестве $\mathbb{R}$ неравенство $\sqrt{3x+1} > 2x$.

Решение:

$$\sqrt{3x+1} > 2x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x < 0, \\ 3x+1 \geq 0; \\ 2x \geq 0, \\ 3x+1 > 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left[-\frac{1}{3}, 0\right), \\ x \in [0, 1) \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{3}, 1\right). \text{ Ответ: } S = \left[-\frac{1}{3}, 1\right).$$

3 Иррациональные неравенства вида $\sqrt{f(x)} \leq g(x)$

На основании свойств радикалов и неравенств делаем вывод, что

$$\sqrt{f(x)} \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) \geq 0, \\ f(x) \leq g^2(x). \end{cases}$$

Замечание

В некоторых случаях удобнее решать смешанную совокупность $\begin{cases} \sqrt{f(x)} = g(x), \\ \sqrt{f(x)} < g(x), \end{cases}$ равносильную исходному неравенству.

4 Иррациональные неравенства вида $\sqrt{f(x)} \geq g(x)$

Учитывая свойства корней и неравенств, получаем:

$$\sqrt{f(x)} \geq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0; \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ f(x) \geq g^2(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0; \\ g(x) \geq 0, \\ f(x) \geq g^2(x). \end{cases}$$

Замечание

В некоторых случаях удобнее решать смешанную совокупность $\begin{cases} \sqrt{f(x)} = g(x), \\ \sqrt{f(x)} > g(x), \end{cases}$ равносильную исходному неравенству.

5 Иррациональные неравенства вида $g(x)^{2n}\sqrt{f(x)} < 0$

Учитывая свойства корней и неравенств, получаем: $g(x)^{2n}\sqrt{f(x)} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) > 0 \end{cases}$

$$(x-2)\sqrt{x+5} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 < 0, \\ x+5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2, \\ x > -5 \end{cases} \Leftrightarrow -5 < x < 2.$$

Ответ: $S = (-5, 2)$.

Задание с решением

О Запомните!

Аналогично поступим в случаях, когда знак „<“ будет заменен на „>“, „≥“, „≤“.

При решении иррациональных неравенств будем использовать те же методы, что и при решении иррациональных уравнений: возведение обеих частей неравенства в натуральную степень, применение вспомогательных неизвестных, выделение полного квадрата (куба) в подкоренных выражениях и др.

Пример

Решим на множестве $\mathbb{R}$ неравенство $\sqrt{2x+1} - \sqrt{x-2} \geq 1$.

Решение:

ОДЗ: $x \in [2, +\infty)$. Заданное неравенство равносильно неравенству $\sqrt{2x+1} \geq 1 + \sqrt{x-2}$.

Обе части этого неравенства неотрицательны на ОДЗ. Значит, возведем в квадрат и получим равносильное неравенство $2\sqrt{x-2} \leq x+2$.

$$2\sqrt{x-2} \leq x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \geq 0, \\ x+2 \geq 0, \\ 4(x-2) \leq (x+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2, \\ x^2 + 12 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [2, +\infty).$$

Учитывая ОДЗ, получим решения $x \in [2, +\infty)$ исходного неравенства.

Ответ: $S = [2, +\infty)$.

Упражнения и задачи



Реальный профиль

А₁

Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство:

- | | | | |
|--------------------------------|--|------------------------------|---------------------------|
| 1. а) $\sqrt{x+1} \geq 2$; | б) $\sqrt{x+1} \leq 2$; | в) $\sqrt{x+1} \geq -2$; | г) $\sqrt{x+1} \leq -2$. |
| 2. а) $\sqrt{2x+3} > 1$; | б) $\sqrt{1-x} \leq 2$; | в) $\sqrt{x^2-3x} \leq -3$; | |
| г) $\sqrt{x^2-3x+2} \geq -5$; | д) $\sqrt{\frac{3x+2}{1-2x}} \leq 1$; | е) $\sqrt[3]{x+2} > -2$. | |
| 3. а) $x\sqrt{x+1} < 0$; | б) $x\sqrt{x+1} \leq 0$; | в) $x\sqrt{x+1} > 0$; | г) $x\sqrt{x+1} \geq 0$. |

В₁

Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство (4-9):

- | | | | |
|---|--|--|--|
| 4. а) $\sqrt{2x+10} > 3x-5$; | б) $\sqrt{x^2-4x} < x-3$; | 7. а) $(x^2-1)\sqrt{4-x^2} \geq 0$; | б) $(2x^2-x-1)\sqrt{x^3-1} \leq 0$. |
| в) $\sqrt{x^2-5x+6} \geq x+4$; | г) $\sqrt{(x-4)(x+1)} \leq 3(x+1)$; | 8. а) $\frac{\sqrt{5-20x-x^2}}{x} \geq 1$; | б) $\frac{\sqrt{2x+1}}{2-x} < 2$; |
| д) $\sqrt[3]{x^3-2x} \geq x$; | е) $\sqrt[3]{1+x^3} \leq 2+x$. | в) $\frac{1}{\sqrt{2+x}} < \frac{1}{1-x}$. | |
| 5. Работайте в парах! а) $\frac{3x^2-5x+8}{\sqrt{x^2-9}} \geq 0$; | | 9. а) $x^2 + \sqrt{x^2+11} > 31$; | б) $\sqrt{\frac{1-x}{2x+1}} - \sqrt{\frac{2x+1}{1-x}} \geq \frac{7}{12}$; |
| б) $\frac{(x-1)\sqrt{x-8}}{x^2-16} \geq 0$; | в) $(x^2-3x)\sqrt[3]{1-x} \leq 0$. | в) $\sqrt{x^2-3x+5} \geq 3x+7-x^2$. | |
| 6. а) $\sqrt{x+3} \leq 2 + \sqrt{x-4}$; | б) $\sqrt[3]{1+\sqrt{3x}} + \sqrt[3]{1-\sqrt{3x}} > 2$; | 10. (2021) Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство $\sqrt{1-x} < \sqrt{2x+4}$. | |
| в) $(x-4)\sqrt{x^2-3} \leq x^2-16$; | г) $\sqrt{x+3} + \sqrt{x-2} \leq \sqrt{2x+4}$. | 11. Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство $x-3\sqrt{x}-4 \leq 0$, предложенное в начале п. 3.5). | |

С₁

12. **Работайте в парах!** Впишите действительное число, затем решите на множестве $\mathbb{R}$ полученное неравенство:

а) $\sqrt{\square} \cdot x + 4 \geq x$; б) $\sqrt{x^2-3x-4} < \square \cdot x + 1$; в) $\sqrt{3x^2-x-2} > \sqrt{3} \cdot x + \square$.

- 13*. Составьте иррациональное неравенство, которое на множестве $\mathbb{R}$:

- | | |
|------------------------|--|
| а) имеет одно решение; | б) имеет два решения; |
| в) не имеет решений; | г) имеет множеством решений промежуток вида (a, b) . |

§4 Показательная функция. Показательные уравнения. Показательные неравенства

4.1. Показательная функция



Во время цепной ядерной реакции вместо каждого свободного нейтрона через l секунд возникают n других свободных нейтронов. Величины l и n зависят от вещества и среды, в которой происходит реакция. Было выявлено, что количество K свободных нейтронов в момент времени t оценивается по формуле $K = K_0 \cdot e^{(\nu-1)t/l}$, где K_0 – количество свободных нейтронов в момент времени $t_0 = 0$, e – постоянная Л.Эйлера ($e \approx 2,7$). Функция вида $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, $f(t) = e^{\mu t}$, $\mu = \frac{\nu-1}{l}$, применяемая в этих расчетах, является показательной функцией.

Определение

Показательной функцией называется функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, $f(x) = a^x$, где $a \in \mathbb{R}_+$, $a \neq 1$.

Например, $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, $f(x) = 2^x$, $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, – показательные функции.

Замечание

Случай $a = 1$ исключаем из рассмотрения, так как получаем постоянную функцию $f(x) = 1$, свойства которой совершенно отличаются от свойств показательной функции.

Основные свойства показательной функции:

1° $D(f) = \mathbb{R}$.

2° $E(f) = \mathbb{R}_+$.

В самом деле, согласно свойствам степени с действительным показателем известно, что $a^x > 0$ для любого действительного x . Следовательно, $E(f) \subseteq \mathbb{R}_+$. Справедливо и обратное включение.

3° Из свойства 2° следует, что показательная функция не имеет нулей. Ее график пересекает ось Oy в точке $(0; 1)$, так как $a^0 = 1$ для всех $a > 0$.

4° В силу свойств сравнения степеней с одинаковым основанием и с произвольным действительным показателем (модуль 3, §2) следует, что показательная функция строго возрастает на множестве $\mathbb{R}$, если $a > 1$, и строго убывает на $\mathbb{R}$, если $0 < a < 1$.

Замечание

В силу монотонности показательной функции верны следующие равносильности:

$$a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}, a > 1),$$

$$a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}, 0 < a < 1),$$

$$a^\alpha = a^\beta \Leftrightarrow \alpha = \beta \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}_+, a \neq 1),$$

которые применяются при решении показательных уравнений и неравенств.

5° Показательная функция не является ни четной, ни нечетной, поскольку $f(-x) = a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ и существует x_0 такое, что $f(-x_0) \neq \pm f(x_0)$.

6° Показательная функция не является периодической, так как она строго монотонна на множестве $\mathbb{R}$.

7° Показательная функция не имеет локальных экстремумов.

8° Показательная функция обратима.

9° График показательной функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ изображен на рисунке 7.11.

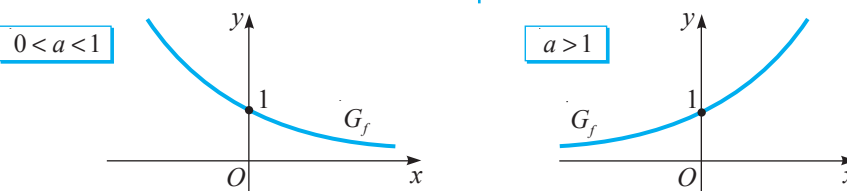


Рис. 7.11



Задание

На рисунке 7.12 изображены графики функций

$$f_1, f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*, f_1(x) = 2^x, f_2(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x.$$

Используя эти графики, определите свойства функций f_1 и f_2 .



Задания с решением

1. Сравним числа $5^{\sqrt{3}}$ и $5^{\sqrt{2,5}}$.

Решение:

Так как функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*, f(x) = 5^x$, строго возрастает, а $\sqrt{3} > \sqrt{2,5}$, то $5^{\sqrt{3}} > 5^{\sqrt{2,5}}$.

2. Сравним с 1: а) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{5}}$; б) $(\sqrt{2}-1)^{-\frac{3}{2}}$.

Решение:

а) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{5}}$ – это значение показательной функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*, f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$, в точке $x_0 = \sqrt{5} > 0$. Так как основание этой функции меньше 1, то $\left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{5}} < 1$.

б) $(\sqrt{2}-1)^{-\frac{3}{2}}$ – это значение показательной функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*, f(x) = (\sqrt{2}-1)^x$, в точке $x_0 = -\frac{3}{2} < 0$.

Так как основание этой функции меньше 1, то $(\sqrt{2}-1)^{-\frac{3}{2}} > 1$.

Показательная функция применяется в различных областях. Например:

- в физике: рост числа свободных нейтронов в ядерной реакции происходит экспоненциально;
- в географии: изменение атмосферного давления в зависимости от высоты носит экспоненциальный характер;
- в социологии: увеличение или уменьшение населения страны, как правило, происходит экспоненциально;
- в политике: увеличение или уменьшение числа последователей политической партии также экспоненциально;
- в биологии: размножение бактерий описывается показательной функцией;
- в экономике: в предпринимательской сфере, в финансово-банковской сфере и т. д.

Таким образом, предприниматели, бизнесмены, специалисты, работающие в сфере финансов, науки и даже в сфере политики, для наблюдения тенденций к снижению или повышению показателей на рынках, в продажах, инвестициях, кредитах, результатах опросов и т. д., применяют две функции:

1) Показательная функция экспоненциального спада (уменьшения), определяемая по формуле $y = a \left(1 - \frac{b}{100}\right)^x$, где y – количество, оставшееся после спада за определенный период времени, a – начальная сумма, $b\%$ – процентное изменение, x – период времени, $1 - \frac{b}{100}$ – коэффициент уменьшения.

2) Показательная функция экспоненциального роста, определяемая формулой $y = a \left(1 + \frac{b}{100}\right)^x$, где y – конечная сумма, полученная за определенный период времени, a – начальная сумма, $b\%$ – процентное изменение, x – период времени, $1 + \frac{b}{100}$ – коэффициент роста.

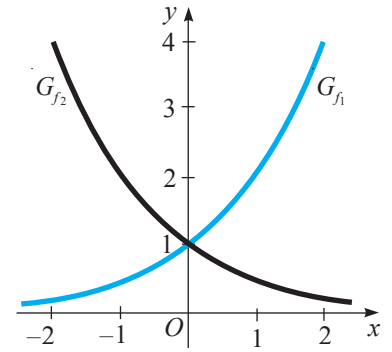


Рис. 7.12



Задача

Текущее количество подписчиков сайта составляет 2 500. Определите, через сколько месяцев число подписчиков составит 100 000, если ежемесячный темп роста составляет 20%.

Решение:

Имеем $a = 2\,500$, $b\% = 20\%$, $y = 100\,000$. Применим функцию экспоненциального роста, чтобы узнать количество месяцев.

Таким образом, $100\,000 = 2\,500 \left(1 + \frac{20}{100}\right)^x$ или $40 = (1,2)^x$.

Следовательно, решение задачи свелось к решению показательного уравнения $(1,2)^x = 40$.

Решением этого уравнения является $x_1 = \log_{1,2} 40 = \frac{\ln 40}{\ln 1,2} = 20,5$.

Ответ: 20,5 месяцев.

4.2. Показательные уравнения

Задача

Допустим, что 3 января 2024 года ученик X класса положил на счет в банке один лей под 10% годовой прибыли. Через сколько лет он станет миллионером?

Решение:

Через 1 год на счету у ученика будет $1 + 0,1 = 1,1$ (лея), а через 2 года будет $1,1 + 0,11 = 1,21 = 1,1^2$ (лея) и т. д. Пусть x – соответствующее количество лет. Составляем уравнение: $1,1^x = 1\,000\,000$.

Полученное уравнение является показательным уравнением.

Будем называть **показательным уравнением** такое уравнение, показателем степени которого является выражение, содержащее неизвестное, а основание степени – положительная постоянная, отличная от 1.

Например, $2^x = 8$, $5 \cdot 3^{2x-1} = 5^{2x}$, $4^{2x} - 4^x = 20$ – показательные уравнения.

Решение показательных уравнений основано на следующей теореме:

Теорема 4

Если $a > 0$ и $a \neq 1$, то уравнения $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ и $f(x) = g(x)$ равносильны.



Задание

Докажите теорему 4.

Рассмотрим **методы** решения некоторых видов показательных уравнений.

1 Показательные уравнения вида $a^{f(x)} = b$, $a > 0$, $a \neq 1$, $a, b \in \mathbb{R}$

1) Пусть $f(x) = x$. Уравнение $a^x = b$ называется **простейшим показательным уравнением**. Возможны следующие частные случаи.

а) $b \leq 0$. Уравнение $a^x = b$ не имеет решений.

б) $b > 0$ и $b = a^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда $a^x = b \Leftrightarrow a^x = a^\alpha \Leftrightarrow x = \alpha$.

Пример. $5^x = 25 \Leftrightarrow 5^x = 5^2 \Leftrightarrow x = 2$. *Ответ:* $S = \{2\}$.

в) $b > 0$ и b не представлено в виде степени a . В этом случае применяем основное логарифмическое тождество $b = a^{\log_a b}$. На основании теоремы 4 получим:

$$a^x = b \Leftrightarrow a^x = a^{\log_a b} \Leftrightarrow x = \log_a b.$$

Пример. $3^x = 12 \Leftrightarrow 3^x = 3^{\log_3 12} \Leftrightarrow x = \log_3 12$. *Ответ:* $S = \{\log_3 12\}$.

2) Аналогично поступаем при решении уравнений вида $a^{f(x)} = b$, $a > 0$, $a \neq 1$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Пример. $5^{2x-1} = 2 \Leftrightarrow 5^{2x+1} = 5^{\log_5 2} \Leftrightarrow 2x-1 = \log_5 2 \Leftrightarrow 2x = \log_5 10 \Leftrightarrow x = \log_5 \sqrt{10}$.

2 Показательные уравнения вида $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, $a > 0$, $a \neq 1$, $a \in \mathbb{R}$, равносильны (согласно теореме 4) уравнению $f(x) = g(x)$.

Пример. $0,2^{x^3-1} = 0,2^{x^2-1} \Leftrightarrow x^3 - 1 = x^2 - 1 \Leftrightarrow x^3 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x-1) = 0$.

Ответ: $S = \{0; 1\}$.

3 Показательные уравнения, решаемые методом разложения на множители

Пример. Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $12^x + 6^x - 4^x - 2^x = 0$.

Решение:

ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$.

Группируя слагаемые, получаем:

$$\begin{aligned} 12^x + 6^x - 4^x - 2^x = 0 &\Leftrightarrow (12^x + 6^x) - (4^x + 2^x) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (2^x \cdot 6^x + 6^x) - (2^{2x} + 2^x) = 0 \Leftrightarrow 6^x(2^x + 1) - 2^x(2^x + 1) = 0 \Leftrightarrow (2^x + 1)(6^x - 2^x) = 0. \end{aligned}$$

Значит, $6^x - 2^x = 0$ или $2^x + 1 = 0$, откуда $6^x = 2^x$ или $2^x = -1$.

Решением уравнения $6^x = 2^x$ (или $3^x = 1$) является $x = 0$, а второе уравнение не имеет решений.

Ответ: $S = \{0\}$.

4 Показательные уравнения вида $f(a^x) = 0$ решаются методом введения вспомогательного неизвестного $a^x = t$, $t > 0$, которым заданное уравнение приводят к уравнению вида $f(t) = 0$.

Пример. Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $9^x - 2 \cdot 3^x = 3$.

Решение:

ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$. $9^x - 2 \cdot 3^x = 3 \Leftrightarrow (3^x)^2 - 2 \cdot 3^x - 3 = 0$. Пусть $3^x = t$, $t > 0$. Получаем уравнение $t^2 - 2t - 3 = 0$, имеющее решения $t_1 = 3$, $t_2 = -1$. Из них только $t_1 = 3 > 0$. Значит, решаем уравнение $3^x = 3$ и получаем $x = 1$.

Ответ: $S = \{1\}$.

О Запомните!

Некоторые показательные уравнения, у которых основания степеней различны, а показатели соответствующих степеней равны, можно решать методом введения вспомогательного неизвестного после деления обеих частей уравнения на одну из этих степеней.

Такие уравнения имеют вид $m \cdot a^{2x} + n \cdot a^x b^x + p \cdot b^{2x} = 0$, $m, n, p \in \mathbb{R}^*$, $a, b \in \mathbb{R}_+^*$.

Пример. Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $8^x + 18^x - 2 \cdot 27^x = 0$.

Решение:

ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$. Разделим обе части уравнения на 8^x и получим уравнение

$$\begin{aligned} \text{уравнение } 1 + \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{3x} = 0. \text{ Пусть } \left(\frac{3}{2}\right)^x = t, t > 0. \text{ Тогда:} \\ 2t^3 - t^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(2t^2 + t + 1) = 0 \Leftrightarrow t = 1. \text{ Значит, } \left(\frac{3}{2}\right)^x = 1 \Leftrightarrow x = 0. \end{aligned}$$

Ответ: $S = \{0\}$.

5 Показательные уравнения, решаемые методом логарифмирования

Пример

1. Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $4^{2x-1} = 3^x$.

Решение:

ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$. Логарифмируя это уравнение по основанию 10, получаем уравнение $(2x-1)\lg 4 = x\lg 3$, равносильное исходному. Откуда $x = \frac{\lg 4}{\lg 16 - \lg 3}$.

Ответ: $S = \left\{ \frac{\lg 4}{\lg 16 - \lg 3} \right\}$.

2. Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $3^{6^x} = 4^{5^x}$.

Решение:

ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$. Логарифмируя это уравнение по основанию 10, получаем $6^x \lg 3 = 5^x \lg 4$.

Вновь логарифмируя, получаем: $x \lg 6 + \lg \lg 3 = x \lg 5 + \lg \lg 4 \Leftrightarrow x = \frac{\lg \lg 4 - \lg \lg 3}{\lg 6 - \lg 5}$.

Ответ: $S = \left\{ \frac{\lg \lg 4 - \lg \lg 3}{\lg 6 - \lg 5} \right\}$.

6 Некоторые показательные уравнения решаются с применением свойств функций, представляющих соответственно левую и правую части уравнения.

Пример. Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $5^x = -4x + 1$.

Решение:

ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$. Подбором находим решение $x = 0$. Так как функция f , заданная формулой $f(x) = 5^x$, строго возрастает на множестве $\mathbb{R}$, а функция g , заданная формулой $g(x) = -4x + 1$, строго убывает на множестве $\mathbb{R}$, то графики этих функций могут пересечься не более одного раза. Итак, уравнение имеет только одно решение $x = 0$.

Ответ: $S = \{0\}$.

Упражнения и задачи



Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт

A

1. **Исследуйте!** Истинно или ложно?

а) Функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (1,5)^x$, строго возрастает на $\mathbb{R}$.

б) Функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$, строго убывает на $\mathbb{R}$.

в) Функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3^{-x}$, строго возрастает на $\mathbb{R}$.

г) Функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$, строго убывает на $\mathbb{R}$.

н/п

2. а) Постройте в одной системе координат графики функций $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3^x$, и $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

б) Определите свойства функции f и g .

3. Даны точки $A(1; 2)$, $B(0; 1)$, $C(-1; -2)$, $D(-2; 4)$, $E(0; -1)$. Определите, какие из них принадлежат графику функции:

а) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x$; б) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

4. **Работайте в парах!** Впишите один из знаков $>$ или $<$, чтобы полученное высказывание стало истинным:

а) $2^{\sqrt{3}} \bullet 2^{\sqrt{5}}$; б) $\left(\frac{2}{5}\right)^{1,5} \bullet \left(\frac{2}{5}\right)^2$; в) $5^3 \bullet 5^{\sqrt{2}}$; г) $(\sqrt{0,1})^3 \bullet (\sqrt{0,1})^5$; д) $3^{-\sqrt{5}} \bullet 3^{-\sqrt{7}}$.

5. **Исследуйте!** Найдите истинностное значение высказывания.

а) Точка $A(1; 8)$ принадлежит графику функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2^{3x}$.

б) Точка $B(0; 1)$ принадлежит графику функции $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2x}$.

в) Точка $C(-1; 9)$ принадлежит графику функции $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = 3^{2x}$.

н/п

6. Дополните рамку, чтобы полученное высказывание было истинным:

„Если $3^x = a$, $a \in \mathbb{R}_+$, то $3^{x+2} = \square$ ”.

В

7. Постройте график функции:

а) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2^{x+1}$; б) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2^{x-1}$; в) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2^{2x}$.

8.  **Работайте в парах!** Постройте график функции:

а) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$; б) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$; в) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$.

9.  **Работайте в парах!** Бактерия размножается посредством деления клеток.

- а) Задайте функцию, описывающую этот процесс.
 б) Определите, сколько бактерий будет в результате 6-го деления.
 в) Сколько бактерий будет в результате 50-го деления?

10. Текущее число последователей политической партии составляет 360000. Узнайте, каково будет ежегодное процентное снижение, если через 3 года количество последователей составит 45000.

11. Предприниматель вложил в строительство 120 000 у.е. с капитализацией сроком на 3 года. Определите, какую сумму он получит, если годовой темп роста составляет 8%.



С

12. Постройте в одной системе координат графики функций $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3^{|x|}$, и $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}$. Что вы заметили?

13.  **Исследуйте!** Определите, какие из указанных чисел больше 1 и какие – меньше 1:

а) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\sqrt{3}}$; б) $(\sqrt{2})^{\frac{1}{2}}$; в) $2^{\frac{1}{3}}$; г) $\pi^{\frac{1}{5}}$; д) $(\sqrt{3}-1)^{-\frac{3}{2}}$; е) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-\sqrt{5}}$.

Реальный профиль

А₁

1. Постройте график и определите свойства функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

а) $f(x) = 4^x$; б) $f(x) = 1,5^x$; в) $f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x$; г) $f(x) = 4^{-x}$;
 д) $f(x) = 3^{x-1}$; е) $f(x) = 3^x - 1$; ж) $f(x) = 1 - 3^x$.

2. Определите значение a ($a \in (0, 1)$ или $a > 1$), если известно, что:

а) $a^{\sqrt{2}} > a$; б) $a^{-0,5} < -a^{-\sqrt{2}}$; в) $a^{2,7} < a^{\sqrt{7}}$.

3.  **Исследуйте!** Сравните числа:

а) $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ и $(\sqrt{2})^{1,3}$; б) $(0,3)^{-\sqrt{3}}$ и $(0,3)^{-1,8}$.

4. Найдите значения x , при которых функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ принимает значения меньше 1, если:

а) $f(x) = (5\sqrt{5})^x$; б) $f(x) = (0,5)^x$; в) $f(x) = 3^{-x}$.

5. ( 2012) Дана функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^{x^2}$. Запишите в рамку одно из понятий *четная*, *нечетная* или *ни четная, ни нечетная*, чтобы полученное выражение было истинным:

„Функция f ”.

6. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $10^x = 1000$; б) $4^x = 64$; в) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 8$; г) $(0,2)^{-x} = \frac{1}{25}$; д) $1,1^x = 1000\,000$;
 е) $7^x = \sqrt[3]{49}$; ж) $3^{2x+2} = -81$; з) $11^{x+1} = 121$; и) $0,2^{x^2+x} = 0$.

B₁

Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение (7–10):

7. а) $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \left(\frac{4}{9}\right)^4$;

б) $12^{x+1} = 15$;

в) $\left(\frac{2}{5}\right)^{x-1} \cdot \left(\frac{25}{8}\right)^{x-1} = \frac{125}{64}$.

8. а) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-1} = \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{32}\right)^{x^2-1}$;

б) $(0,5)^{x^2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{4}$;

в) $\sqrt[3]{4^{x+1}} \cdot 16 = \sqrt{4^{x^2}}$.

9. а) $2^{x+1} + 3 \cdot 2^{x-2} = 77$;

б) $4^{x+3} - 4 \cdot 7^x + 2 \cdot 7^{x+1} = 4^{x-1}$;

в) $3^{x+2} + 3 \cdot 5^{x+4} = 3^{x+6} - 5^{x+3}$.

10.  **Работайте в парах!**

а) $9^x + 3^x = 272$;

б) $16^x - 4 \cdot 4^x + 3 = 0$;

в) $2 \cdot 2^x + 3 \cdot 2^{\frac{x}{2}} + 1 = 0$.

11.  **Исследуйте!** При каких значениях x функции $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (\sqrt{2})^x$, $g(x) = (0,25)^{x-2}$, принимают равные значения?

12.  **Исследуйте!** При каких значениях x функция $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ принимает значения больше, чем 1, если:

а) $f(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$;

б) $f(x) = 2^{\frac{x}{2}}$.

Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение (13–21):

13. а) $\left(\frac{4}{5}\right)^{x^2} \cdot \left(\frac{25}{64}\right)^{x^2} = \frac{625}{65536}$;

б) $(0,6)^x \cdot \left(\frac{25}{9}\right)^{x^2-12} = \left(\frac{27}{125}\right)^3$.

14. а) $5^{2x} + 35 \cdot 7^x = 35 \cdot 5^{2x} + 7^x$;

б) $4^x - 3^{x+1,5} + 2^{2x-1} = 3^{x+0,5}$.

15. а) $81^{x^2-1} - 36 \cdot 9^{x^2-3} + 3 = 0$;

б) $8^x - 2^{x+1} - 4 = 0$.

16. а) $(2 + \sqrt{3})^{2x+1} + (2 - \sqrt{3})^{2x+1} = 4$;

б) $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^{x^2} + \left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^{x^2} = 10$.

17.  **Работайте в группах!**

а) $4^x + 10^x - 2 \cdot 25^x = 0$;

б) $10^{\frac{2}{x}} + 25^{\frac{1}{x}} = 4,25 \cdot 50^{\frac{1}{x}}$;

в) $3 \cdot \sqrt[3]{4} - 4 \cdot \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{25} = 0$.

18.  **Работайте в парах!**

а) $4^{|x-3|} + 4^{|x+1|} = 4^x$;

б) $|5^x - 1| + |5^x - 5| = 2$.

19. а) $3^x + 4^x = 5^x$;

б) $2^x - 3^{\frac{x}{2}} = 7$;

в) $\left(\frac{2}{5}\right)^x = -3x^2 + 2x - 1$.

20. а) $6^{(x+3)\log_6 2} \cdot 2^{x^2-2x} = 32$;

б) $7^{(x-2)\log_7 3} \cdot 3^{x^2+3x} = 27$;

в) $3^x \cdot 7^{\frac{x+3}{x}} = 1323$.

21.  (2016) Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $4^{-3x-6} = 2^{-x} \cdot 8$.

C₁

22. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение: $(x^2 - x) \cdot 8^{\sqrt{2-x}} + 12 \cdot 8^{\sqrt{2-x}} = (x^2 - x) \cdot 8^{\sqrt{2x}} + 12 \cdot 8^{\sqrt{2x}}$.

23.  (2014) Найдите действительные значения параметра a , при которых уравнение $\frac{(3^x - a)(x - 2)}{x - 1} = 0$ имеет действительное решение.

24. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение, где a – действительный параметр:

а) $625^{|x+1|} - 2 \cdot 25^{|x+1|} + a = 0$;

б) $3 \cdot 4^{x-2} + 27 - a = a \cdot 4^{x-2}$;

в) $a \cdot 2^x + 2^{-x} = 5$.

25. Составьте показательное уравнение, которое:

а) не имеет решений;

б) имеет одно решение;

в) имеет два решения.

4.3. Показательные неравенства

Задача

Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство $2^{2x+2} < 6^x + 2 \cdot 3^{2x+2}$.

Это неравенство является показательным неравенством.

Будем называть **показательным неравенством** неравенство, в котором показатель степени является выражением, содержащим неизвестное, а основание степени – положительная постоянная, отличная от 1.

Например, неравенства $3^x < 9$, $9^x - 2 \cdot 3^x - 8 \leq 0$ являются показательными.

Рассмотрим основные **методы** решения некоторых видов показательных неравенств.

1 Показательные неравенства вида $a^{f(x)} < a^{g(x)}$, $a > 0$, $a \neq 1$, $a \in \mathbb{R}$

Решение неравенств этого вида основано на теореме 5.

Теорема 5

Если $a > 1$, то неравенство $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ равносильно неравенству $f(x) < g(x)$.
Если $0 < a < 1$, то неравенство $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ равносильно неравенству $f(x) > g(x)$.

Доказательство этой теоремы основано на свойстве 4° (п. 4.1) показательной функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Примеры

1. Решим на множестве $\mathbb{R}$ неравенство $2^{3x-1} < 4$.

Решение:

$$2^{3x-1} < 4 \Leftrightarrow 2^{3x-1} < 2^2 \Leftrightarrow 3x-1 < 2 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1).$$

Ответ: $S = (-\infty, 1)$.

2. Решим на множестве $\mathbb{R}$ неравенство $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} < \left(\frac{1}{3}\right)^{-2x}$.

Решение:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} < \left(\frac{1}{3}\right)^{-2x} \Leftrightarrow x+2 > -2x \Leftrightarrow 3x > -2 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{2}{3}, +\infty\right).$$

Ответ: $S = \left(-\frac{2}{3}, +\infty\right)$.

Аналогично решают неравенства вида: $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, $a^{f(x)} \leq a^{g(x)}$, $a^{f(x)} \geq a^{g(x)}$, $a > 0$, $a \neq 1$, $a \in \mathbb{R}$.

При применении тех же методов, что и при решении показательных уравнений, решение заданного показательного неравенства, как правило, сводится к решению более простого неравенства вида:

$$a^{f(x)} < a^{g(x)}, a^{f(x)} \leq a^{g(x)}, a^{f(x)} > a^{g(x)}, a^{f(x)} \geq a^{g(x)}, a > 0, a \neq 1, a \in \mathbb{R}.$$

2 Показательные неравенства вида $f(a^x) > 0$ решаются методом введения вспомогательного неизвестного $a^x = t > 0$, которое приводит исходное неравенство к неравенству вида $f(t) > 0$.

Пример

Решим на множестве $\mathbb{R}$ неравенство $16^x + 2 \cdot 4^x > 3$.

Решение:

$$\text{ОДЗ: } x \in \mathbb{R}. \quad 16^x + 2 \cdot 4^x > 3 \Leftrightarrow (4^x)^2 + 2 \cdot 4^x - 3 > 0.$$

Пусть $4^x = t > 0$. Получаем неравенство $t^2 + 2t - 3 > 0$, имеющее множество решений $S_1 = (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$. То есть, $t \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$.

Учитывая условие, $t > 0$, получаем $t \in (1, +\infty)$, или $t > 1$. Возвращаясь к неизвестному x , получаем $4^x > 1$, или $4^x > 4^0$. Значит, $x > 0$, или $S = (0, +\infty)$.

Ответ: $S = (0, +\infty)$.

Аналогично решаются неравенства вида $f(a^x) \geq 0$, $f(a^x) < 0$, $f(a^x) \leq 0$.

При решении показательных неравенств применяются методы, аналогичные тем, которые применяются при решении показательных уравнений.

Замечание

Упражнения и задачи



Реальный профиль

A₁1. Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство:

$$\begin{array}{llll} \text{а) } 6^{x-3} > 36; & \text{б) } \left(\frac{1}{5}\right)^{x+4} < \frac{1}{125}; & \text{в) } 5^{x^2+x} > 1; & \text{г) } 2^{x^2-x+8} > 0; \\ \text{д) } 0,3^{x+5} < -4; & \text{е) } 2^x \cdot 5^x \leq 0,01 \cdot (10^{x-2})^3; & \text{ж) } 2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+3}. \end{array}$$

B₁Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство (2–4):

$$\begin{array}{lll} 2. \text{ а) } 25^x - 5^x - 20 \leq 0; & \text{б) } \left(\frac{1}{5}\right)^{2x+1} > \left(\frac{1}{5}\right)^x + 10; & \text{в) } 0,49^{x+1} - 5 \cdot 0,7^{x+1} - 14 \geq 0. \end{array}$$

3. Работайте в парах!

$$\begin{array}{ll} \text{а) } 1000 \cdot 0,3^{\sqrt{x+1}-1} \geq 27; & \text{б) } (\lg 4)^{2x-5} < (\log_4 10)^{2-x}; \\ \text{в) } 3^{-x+2} \cdot 5^{-x+2} > 15 \cdot (225^{2x-1})^3; & \text{г) } 0,6^{x-3} < 5 \cdot 36^{3-x}. \end{array}$$

4. а) $2^{2x+2} < 6^x + 2 \cdot 3^{2x+2}$ (предложенное в начале п. 4.3);

$$\begin{array}{lll} \text{б) } \frac{1}{0,4^x + 5} < \frac{1}{0,4^{x+1} - 1}; & \text{в) } 2^{2+x} - 2^{2-x} > 15; & \text{г) } 8^x + 18^x - 2 \cdot 3^{3x} \leq 0; \\ \text{д) } 2^{2x+1} - 5 \cdot 2^x + 2 > 0; & \text{е) } \left(\frac{4}{7}\right)^{13x^2} \leq \left(\frac{4}{7}\right)^{x^2+36} \leq \left(\frac{49}{16}\right)^{-6x^2}; & \text{ж) } 64^x - 7 \cdot 8^x + 6 \geq 0. \end{array}$$

5. (2017) Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство $\left(\frac{9}{4}\right)^{-2x-1} \leq \frac{3}{2}$.6. (2023) Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство $0,25^{x+3} \leq 8 \cdot 2^x$.C₁Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство (7–8):

$$7. \text{ а) } 1 < 5^{|x^2-x|} < 25; \quad \text{б) } |3^x - 2| - |3^x - 1| \geq |3^x + 1| - 5; \quad \text{в) } 6^{2|x|} - 2 \cdot 18^{|x|} - 8 \cdot 3^{2|x|} > 0.$$

$$8. \text{ а) } \sqrt{9^x - 3^{x+2}} \leq 3^x - 9; \quad \text{б) } 4^{\sqrt{x+1,5}} + 6^{\sqrt{x}} > 9^{\sqrt{x+1}}.$$

9. Составьте показательное неравенство, множеством решений которого является промежуток $(-3, 2]$.10*. Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство, где a – действительный параметр:

$$\text{а) } a^2 - 2 \cdot 4^{x+1} - a \cdot 2^{x+1} > 0; \quad \text{б) } \frac{a^x}{a^x - 1} > \frac{1 + a^{-x}}{1 + 2a^{-x}}.$$

§5 Логарифмическая функция. Логарифмические уравнения. Логарифмические неравенства

5.1. Логарифмическая функция

Известно, что показательная функция для $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ обратима. Обратная показательной функции называется *логарифмической функцией*. Другими словами, справедлива равносильность: $y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x, x > 0, a > 0, a \neq 1$.



определение

Логарифмической функцией называется функция $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_a x, a \in \mathbb{R}_+^*, a \neq 1$.

Например, $f_1, f_2: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x) = \log_3 x, f_2(x) = \log_{\sqrt{2}} x$, являются логарифмическими функциями.

О Запомните!

Большинство *свойств логарифмической функции* выводятся из свойств показательной функции с тем же основанием.

- 1° $D(f) = \mathbb{R}_+^*$, так как множество $D(f)$ совпадает с областью значений показательной функции.
- 2° $E(f) = \mathbb{R}$ – область определения показательной функции.
- 3° Логарифмическая функция принимает значение 0 только в точке $x_0 = 1$, так как $\log_a x = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1$. Ее график не пересекает ось Oy , поскольку $0 \notin D(f)$.
- 4° Логарифмическая функция строго возрастает (убывает) на $\mathbb{R}_+^*$, если основание $a \in (1, +\infty)$ (соответственно $a \in (0, 1)$).

Действительно, для $a > 1$ и $x_1 > x_2$, в силу основного логарифмического тождества, имеем $a^{\log_a x_1} > a^{\log_a x_2}$.

Так как показательная функция строго возрастает (убывает) на $\mathbb{R}$, при $a > 1$ (соответственно $0 < a < 1$), то: $\log_a x_1 > \log_a x_2$ (соответственно $\log_a x_1 < \log_a x_2$).

- 5° В силу монотонности следует, что при $a > 1$ логарифмическая функция принимает положительные значения для $x \in (1, +\infty)$ и отрицательные для $x \in (0, 1)$. Если $0 < a < 1$, то логарифмическая функция принимает положительные значения для $x \in (0, 1)$ и отрицательные для $x \in (1, +\infty)$.

Действительно, для $a > 1$, на основании монотонности, имеем:

$$\log_a x > 0 \Leftrightarrow \log_a x > \log_a 1 \Leftrightarrow x > 1.$$

Аналогично доказываются остальные случаи.

- 6° Так как множество $\mathbb{R}_+^*$ не симметрично относительно начала координат, то логарифмическая функция не является ни четной, ни нечетной.
- 7° Логарифмическая функция не является периодической, поскольку она строго монотонна на множестве $\mathbb{R}_+^*$.
- 8° Логарифмическая функция не имеет локальных экстремумов, так как она строго монотонна на множестве $\mathbb{R}_+^*$.
- 9° Логарифмическая функция биективна, значит, является обратимой. Обратная к логарифмической функции – это показательная функция с тем же основанием.
- 10° График логарифмической функции $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$, изображен на рисунке 7.13.

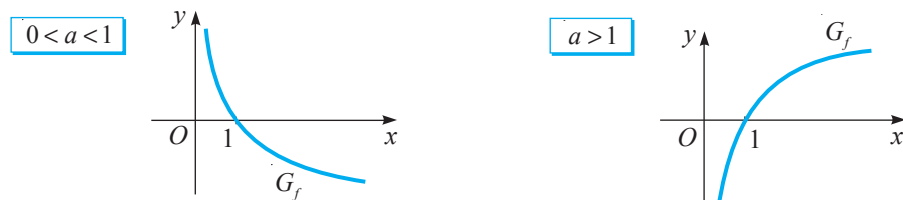


Рис. 7.13

3 замечание

В силу монотонности логарифмической функции верны следующие равносильности (для $\alpha, \beta, a \in \mathbb{R}_+^*$, $a \neq 1$):

$$\log_a \alpha > \log_a \beta \Leftrightarrow \alpha > \beta, \quad a > 1,$$

$$\log_a \alpha > \log_a \beta \Leftrightarrow \alpha < \beta, \quad 0 < a < 1,$$

$$\log_a \alpha = \log_a \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta,$$

которые применяются при решении логарифмических уравнений и неравенств.



**Задание
с решением**

Даны функции $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, $f_1(x) = 2^x$; $f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, $f_2(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

а) Построим графики логарифмических функций:

$$g_1: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}, g_1(x) = f_1^{-1}(x) = \log_2 x, \quad g_2: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}, g_2(x) = f_2^{-1}(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x).$$

б) Построим в одной декартовой системе координат графики функций f_1, f_2, g_1, g_2 .

Решение:

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$g_1(x) = \log_2 x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$g_2(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$	3	2	1	0	-1	-2	-3

а) Составим таблицу значений для функций g_1 и g_2 :
Графики функций g_1, g_2 изображены на рисунке 7.14.

б) Графики функций f_1, f_2, g_1, g_2 изображены на рисунке 7.15.

Замечаем, что графики функций f_1 и g_1, f_2 и g_2 симметричны относительно биссектрисы I и III четвертей.

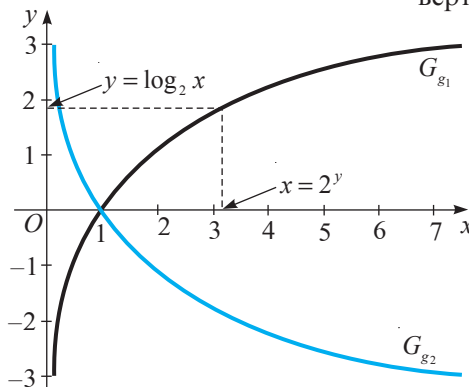


Рис. 7.14

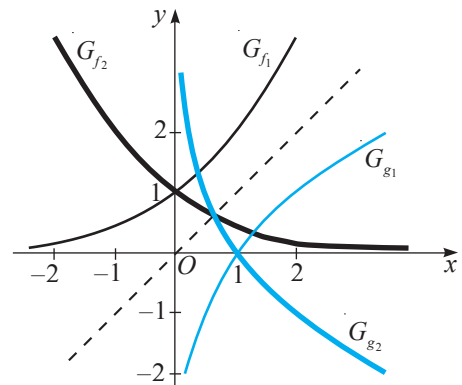


Рис. 7.15

Применение логарифмов и логарифмических функций в различных областях

- ✓ В химии: при нахождении pH жидких веществ.
- ✓ В сейсмологии: при измерении силы подземных толчков по шкале Рихтера.
- ✓ В физике: при измерении количества децибелов громкости звуков.
- ✓ В астрономии: свечение небесного тела; вычисление мнимой силы свечения небесного тела.
- ✓ В биологии: формула молекулы ДНК; раковины улиток и морских моллюсков образованы из частей, подобных графикам логарифмических функций.



**Задание
с решением**

Сравним: а) $\log_{\sqrt{3}} 2$ с $\log_9 7$;

б) $\log_{\frac{1}{2}} 3$ с $\log_7 5$.

Решение:

а) Преобразуем эти выражения, чтобы получить логарифмы по одному и тому же основанию:

$$\log_{\sqrt{3}} 2 = 2 \log_3 2 = \log_3 4, \quad \log_9 7 = \frac{1}{2} \log_3 7 = \log_3 \sqrt{7}.$$

Так как логарифмическая функция с основанием больше 1 строго возрастает и $4 > \sqrt{7}$, то $\log_3 4 > \log_3 \sqrt{7}$. Значит, $\log_{\sqrt{3}} 2 > \log_9 7$.

б) В силу свойства 5° логарифмической функции имеем $\log_{\frac{1}{2}} 3 < 0$, а $\log_7 5 > 0$.

Следовательно, $\log_{\frac{1}{2}} 3 < \log_7 5$.

Упражнения и задачи



Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт

А

1. **Исследуйте!** Истинно или ложно? а) Функция $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_5 x$, строго возрастает на $\mathbb{R}_+^*$.
 б) Функция $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_{0,5} x$, строго убывает на $\mathbb{R}_+^*$.
 в) Функция $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_{\sqrt{2}} x$, строго возрастает на $\mathbb{R}_+^*$.
 г) Функция $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_{\frac{2}{3}} x$, строго убывает на $\mathbb{R}_+^*$.
2. а) Постройте в одной системе координат графики функций $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_3 x$, и $g: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$.
 Что вы заметили?
 б) Определите свойства функции f и g .
3. **Исследуйте!** Даны точки $A(1; 0)$, $B(5; 1)$, $C\left(\frac{1}{5}; -1\right)$, $D(5; -1)$, $E(25; 2)$. Определите, какие из них принадлежат графику функции:
 а) $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_5 x$, б) $g: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \log_{\frac{1}{5}} x$.
4. Впишите один из знаков $>$ или $<$, чтобы полученное высказывание стало истинным:
 а) $\log_2 7$ ☐ $\log_2 5$; б) $\log_{\sqrt{3}} 2,5$ ☐ $\log_{\sqrt{3}} 1,2$; в) $\log_{0,2} 10$ ☐ $\log_{0,2} 5$;
 г) $\log_{\frac{1}{5}} 0,2$ ☐ $\log_{\frac{1}{5}} 0,1$; д) $\log_{\sqrt{5}} 16$ ☐ $\log_{\sqrt{5}} 20$; е) $\lg 0,14$ ☐ $\lg 0,1$.

В

5. Найдите значение x , при которых существует логарифм:
 а) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 4)$; б) $\log_3(-x^2 + 5x - 6)$; в) $\lg(1 - x^2)$; г) $\log_x(x - 1)$; д) $\log_{x+1} x^2$; е) $\ln(2 - x)$.
6. **Работайте в парах!**
 а) Постройте график функции $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + \lg x$. б) Определите свойства функции f .
7. Известно, что pH раствора рассчитывается по формуле $\text{pH} = -\lg[\text{H}^+]$. Концентрация ионов водорода в чистой воде равна $\text{H}^+ = 1 \cdot 10^{-7}$ моль. Найдите pH чистой воды.
8. Формула для расчета сложных процентов имеет вид: $S = S_0 e^{rt}$, где S_0 – сумма денег, вложенная в банк, S – конечная сумма денег на счете через t лет, в течение которых счет увеличивается, r – годовая процентная ставка. Человек вложил в банк 3000 у.е. под сложные проценты с годовой процентной ставкой 5%. Определите, через сколько лет первоначальная сумма будет увеличена вдвое.
9. Запишите $\log_3 x$ в виде выражения, содержащего $\log_9 x$.

С

10. Постройте график функции: а) $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_2 |x|$; б) $g: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = |\log_2 x|$.

Реальный профиль

А₁

1. Постройте график и определите свойства функции $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$:
 а) $f(x) = \log_5 x$; б) $f(x) = \log_{0,1} x$; в) $f(x) = \lg x$; г) $f(x) = \ln x$.
2. Сравните с 0, затем с 1:
 а) $\log_3 2$; б) $\log_3 0,2$; в) $\log_{\frac{1}{3}} 0,5$; г) $\log_{\sqrt{2}} 0,2$.
3. Используя свойства изученных функций, сравните:
 а) $\lg 8$ с $\lg 9$; б) $\log_{0,1} \frac{2}{5}$ с $\log_{0,1} 0,41$; в) $\log_5 \frac{1}{3}$ с $\log_5 \frac{1}{10}$.
4. **Работайте в парах!** Определите интервалы монотонности, четность или нечетность, множество значений, локальные экстремумы функции, заданной формулой $f(x) = \log_{1,3} x - 2$.

2 Логарифмические уравнения вида $\log_a f(x) = \log_a g(x)$

Решение таких уравнений основано на следующей теореме:

Теорема 6

Если $a > 0$, $a \neq 1$, то уравнение $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Пример. Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $\log_5(x^2 + 1) = \log_5(x + 3)$.

Решение:

$$\log_5(x^2 + 1) = \log_5(x + 3) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 = x + 3, \\ x^2 + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, \\ x = 2. \end{cases}$$

Ответ: $S = \{-1; 2\}$.

3 Логарифмические уравнения, решаемые методом группировки

Пример. Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $\log_2(x - 1) = \log_4(x + 2)^4 - \log_2 3x$.

Решение:

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x - 1 > 0, \\ (x + 2)^4 > 0, \\ 3x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1. \text{ Сгруппировав удобным способом слагаемые, получим:}$$

$$\log_2(x - 1) + \log_2 3x = \log_4(x + 2)^4 \Leftrightarrow \log_2 3x(x - 1) = \log_2(x + 2)^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 7x - 4 = 0,$$

откуда $x_1 = 4 \in \text{ОДЗ}$, $x_2 = -\frac{1}{2} \notin \text{ОДЗ}$.

Ответ: $S = \{4\}$.

4 Логарифмические уравнения вида $f(\log_a x) = 0$ решаются методом замены неизвестного. Заменой $\log_a x = t$ заданное уравнение сводится к решению уравнений вида $\log_a x = t_i$, где t_i являются решениями уравнения $f(t) = 0$.

Пример. Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $\log_3^2(x + 1) + \log_3(x + 1) - 12 = 0$.

Решение:

Пусть $\log_3(x + 1) = t$. Тогда получаем уравнение $t^2 + t - 12 = 0$, решения которого $t_1 = 3$, $t_2 = -4$.

$$\text{Решаем совокупность уравнений } \begin{cases} \log_3(x + 1) = 3, \\ \log_3(x + 1) = -4 \end{cases} \text{ и получаем: } \begin{cases} x = 26, \\ x = -\frac{80}{81}. \end{cases}$$

Так как выполненные преобразования равносильны, то эти числа являются решениями исходного уравнения.

$$\text{Ответ: } S = \left\{ -\frac{80}{81}; 26 \right\}.$$

5 Существуют логарифмические уравнения, которые не относятся ни к одному из представленных видов.

а) Уравнения, содержащие логарифмы по разным основаниям

Пример. Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $\log_4 x + \log_3 x = 2$.

Решение:

Используя формулу перехода к другому основанию, получаем:

$$\frac{\lg x}{\lg 4} + \frac{\lg x}{\lg 3} = 2 \Leftrightarrow x = 10^{\frac{2 \lg 4 \lg 3}{\lg 12}}. \quad (\text{Проверьте!})$$

$$\text{Ответ: } S = \left\{ 10^{\frac{2 \lg 4 \lg 3}{\lg 12}} \right\}.$$

б) Уравнения, в которых неизвестное содержится как в основании, так и под знаком логарифмов

Пример. Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $\log_{x+1} 5 + \log_5 (x+1) = 2$.

Решение:

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x+1 > 0, \\ x+1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1, \\ x \neq 0. \end{cases} \text{ Значит, } x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty).$$

$$\text{Так как } \log_{x+1} 5 = \frac{1}{\log_5 (x+1)}, \text{ то: } \frac{1}{\log_5 (x+1)} + \log_5 (x+1) = 2 \Leftrightarrow \log_5 (x+1) = 1 \Leftrightarrow x = 4.$$

$$\text{Ответ: } S = \{4\}.$$

6 Некоторые уравнения, содержащие неизвестное под знаком логарифма, можно решить при помощи свойств функций, являющихся соответственно правой и левой частями уравнения.

Пример. Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $\log_6 (x+2) = 13 - 3x$.

Решение:

ОДЗ: $x \in (-2, +\infty)$. Подбором находим решение $x = 4$. Так как функция f , заданная формулой $f(x) = \log_6 (x+2)$, строго возрастает на ОДЗ, а функция g , заданная формулой $g(x) = 13 - 3x$, строго убывает на ОДЗ, то графики этих функций пересекаются только в одной точке. Значит, уравнение имеет единственное решение: $x = 4$.

$$\text{Ответ: } S = \{4\}.$$

3 замечание

Рассмотренные методы решения логарифмических уравнений можно классифицировать следующим образом:

- а) **метод потенцирования**, то есть переход от уравнения $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ к уравнению $f(x) = g(x)$;
- б) **метод введения вспомогательных неизвестных**;
- в) **метод логарифмирования**, то есть переход от уравнения $f(x) = g(x)$ к уравнению $\log_a f(x) = \log_a g(x)$.

Пример. Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $2^{3x-1} = 5$.

Решение:

$$2^{3x-1} = 5 \Leftrightarrow \log_2 2^{3x-1} = \log_2 5 \Leftrightarrow 3x-1 = \log_2 5 \Leftrightarrow 3x = 1 + \log_2 5 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \log_2 10.$$

$$\text{Ответ: } S = \left\{ \frac{1}{3} \log_2 10 \right\}.$$

Упражнения и задачи



Реальный профиль

A₁

Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение (1–4):

1. а) $\log_2 x = 4$; б) $\log_{\frac{1}{3}} x = 0$; в) $\log_{100} x = 1$;
г) $\log_{0,3} x = -1$; д) $\log_{\sqrt{3}} x = -2$.
2. а) $\log_{0,1} (3x-1) = -1$; б) $\log_2 (x^2 - 4) = 2$; в) $\log_{\sqrt{2}} (x^2 - 3x) = 6$.
3. **Работайте в парах!**
а) $\log_3 (x+2) = \log_3 x^2$; б) $\log_{0,1} (x^2 - x - 1) = \log_{0,1} (x+4)$; в) $\log_{\sqrt{5}} (\sqrt{x} + 1) = \log_{\sqrt{5}} (2\sqrt{x})$.
4. а) $3(\lg(x-1) - 2) = \lg 5 - \lg(x-1)$; б) $\log_{\frac{1}{2}} x^2 - \lg 4 = \log_{\frac{1}{2}} x + \lg 25$.

В₁

Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение (5–6):

5. а) $\lg(35 - x^3) = 3\lg(5 - x)$; б) $\log_3^2(x + 2) - 3\log_3(x + 2) - 4 = 0$; в) $12 - \lg^2 x = \lg x$.
 6. а) $\log_5(3x - 11) + \log_5(x - 27) = 3 + \log_5 8$; б) $\log_x 2 + \log_2 x = -2,5$; в) $\log_{\frac{1}{3}}^2 9x + \log_3 \frac{x^2}{9} = 8$;
 г) $2\log_4 x^2 - \log_4^2(-x) = 4$; д) $\log_4(x + 12) \cdot \log_x 2 = 1$; е) $2\log_x 3 + \log_{3x} 3 + 3\log_{9x} 3 = 0$;
 ж) $3^{\log_2 x^2} \cdot 5^{\log_4 x^2} = 2025$; з) $\log_2(x^2 - x)^2 - 2\log_2(x + 2) = 2$.
 7. (ЕАК 1 2014) Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $\log_x(4x - 3) = 2$.
 8. (ЕАК 1 2023) Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $\log_3^2(-x) - 2\log_3\left(\frac{x^2}{27}\right) - 6 = 0$.
 9. (ЕАК 1 2024) Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $\log_2(x - 1) + \log_2(x - 2) = 1$.

С₁

10. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $\log_3(3^x - 8) = |2 - x|$.
 11*. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение, где a – действительный параметр:
 а) $x^{\log_a x} = a^2 x$, $a > 0$, $x > 0$; б) $a^{2\lg x - \lg(6 - x)} = 1$; в) $\lg 2x + \lg(2 - x) = \lg \lg a$.

5.3. Логарифмические неравенства



Задание

Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство $0,5^{\log_{0,1}(x-1)} < 1$.

Решение:

ОДЗ: $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$. Учитывая, что это неравенство вида $a^{f(x)} < 1$, где $a = 0,5 < 1$, получаем равносильное неравенство $\log_{0,1}(x - 1) > 0$, которое является логарифмическим неравенством.

Будем называть **логарифмическим неравенством** такое неравенство, в котором выражение с неизвестным содержится в основании логарифмов и/или под знаком логарифмов.

Например, $\log_5 x < 2$, $\log_{0,2}(3x - 1) \geq 0$, $\lg^2 x - \lg x - 6 \leq 0$, $\log_{x+1}(x - 3) > \log_{x+1} x$ являются логарифмическими неравенствами.

Рассмотрим основные методы решения некоторых видов логарифмических неравенств.

1 Логарифмические неравенства вида $\log_a f(x) < b$

Решение неравенств этого вида сводится к решению совокупности систем

$$\begin{cases} 0 < a < 1, \\ f(x) > a^b; \end{cases} \quad \begin{cases} a > 1, \\ f(x) < a^b. \end{cases}$$

2 Логарифмические неравенства вида $\log_a f(x) > \log_a g(x)$, $a > 0$, $a \neq 1$, $a \in \mathbb{R}$

Решение неравенств этого вида основано на теореме 7.



Теорема 7

Если $a > 1$, то неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ (1)

равносильно системе $\begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) > g(x). \end{cases}$

Если $0 < a < 1$, то неравенство (1) равносильно системе $\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) < g(x). \end{cases}$

Пример. Решим на множестве $\mathbb{R}$ неравенство $\log_2(3x - 1) > \log_2(5 - x)$.

Решение:

$$\log_2(3x - 1) > \log_2(5 - x) \Leftrightarrow \begin{cases} 5 - x > 0, \\ 3x - 1 > 5 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 5, \\ x > 1,5 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (1,5; 5).$$

Ответ: $S = (1,5; 5)$.

Аналогично решают логарифмические неравенства вида:

$$\log_a f(x) \geq \log_a g(x), \log_a f(x) < \log_a g(x), \log_a f(x) \leq \log_a g(x), \quad (2)$$

где $a > 0$, $a \neq 1$, $a \in \mathbb{R}$.

Решение логарифмического неравенства сводится, как правило, к решению неравенства вида (1) или (2).

3 Логарифмические неравенства вида $\log_a f(x) \pm \log_a g(x) < \log_a h(x)$, $a > 0$, $a \neq 1$

Используя свойства логарифмов и учитывая ОДЗ исходного неравенства, решение таких видов неравенств сводится к решению неравенств вида $\log_a f(x) < b$ или $\log_a f(x) < \log_a g(x)$.

Аналогично решаются неравенства вида $\log_a f(x) \pm \log_a g(x) \leq \log_a h(x)$.

Аналогично решение неравенств вида $\log_a f(x) \pm \log_a g(x) > \log_a h(x)$ сводится к решению неравенств вида $\log_a f(x) > b$ или $\log_a f(x) > \log_a g(x)$.

4 Логарифмические неравенства вида $\log_{mx+n} a < b$, $a \in \mathbb{R}_+^*$, $b, m, n \in \mathbb{R}$

Это неравенство равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} 0 < mx + n < 1, \\ (mx + n)^b < a; \\ mx + n > 1, \\ (mx + n)^b > a. \end{cases}$$

Пример.

$$\begin{aligned} \log_{x+3} 8 < 2 &\Leftrightarrow \log_{x+3} 8 < \log_{x+3} (x+3)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x+3 < 1, \\ 8 < (x+3)^2; \\ x+3 > 1, \\ 8 < (x+3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < x < -2, \\ x^2 + 6x + 9 < 8; \\ x > -2, \\ x^2 + 6x + 9 > 8 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -3 < x < -2, \\ -3 - 2\sqrt{2} < x < -3 + 2\sqrt{2}; \\ x > -2, \\ x \in (-\infty, -3 - 2\sqrt{2}) \cup (-3 + 2\sqrt{2}, +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-3, -2), \\ x \in (-3 + 2\sqrt{2}, +\infty). \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $S = (-3, -2) \cup (-3 + 2\sqrt{2}, +\infty)$.

5* Решение логарифмических неравенств методом логарифмирования

Пример. Решим на множестве $\mathbb{R}_+^*$ неравенство $x^{2\lg x} > 100$.

Решение:

ОДЗ: $x \in (0, +\infty)$. Так как на ОДЗ обе части неравенства положительны, то логарифмируем по основанию 10 и получаем логарифмическое неравенство:

$$\lg x^{2\lg x} > \lg 100 \Leftrightarrow 2\lg^2 x > 2.$$

Значит, $\lg^2 x > 1 \Leftrightarrow (\lg x - 1)(\lg x + 1) > 0$. Получаем: $\lg x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lg x < -1, \\ \lg x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < \frac{1}{10}, \\ x > 10. \end{cases} \text{ Учитывая ОДЗ, находим, что } x \in \left(0, \frac{1}{10}\right) \cup (10, +\infty).$$

Ответ: $S = \left(0, \frac{1}{10}\right) \cup (10, +\infty)$.

О Запомните!

Знак полученного неравенства („<“, „≤“, „>“, „≥“) не изменится при логарифмировании, если логарифмируем обе его части по основанию $a > 1$; знак полученного неравенства („<“, „≤“, „>“, „≥“) меняется на противоположный, если логарифмируем обе его части по основанию $0 < a < 1$.

Упражнения и задачи



Реальный профиль

A₁Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство (1–3):

1. а) $\log_2(1-x) < 0$; б) $\lg(x^2+1) \leq 1$; в) $\ln(3-2x) \leq 0$;
 г) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-7) > -2$; д) $\log_{0,1}(x^2-3x+2) > 0$; е) $\log_{\sqrt{3}}(x^2-2x) \geq 2$.
2. **Работайте в парах!** а) $\log_4(x^2+1) \geq \log_4(3x+1)$; б) $\log_{\frac{2}{3}}(2-x) \leq \log_{\frac{2}{3}}(5x-8)$; в) $\lg(2x+1) > \log_{\frac{1}{10}} x$.
3. а) $\log_2(x-3) - \log_2 2x \geq 1$; б) $\lg(2x-4) + \lg 3x < \lg(x+1)$.
4. (2019) Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство $\log_2(x-3) \leq 1$.

B₁Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство (5–7):

5. а) $\log_{2x} 8 < 1$; б) $\log_{1-x} 2 < 2$; в) $\log_x 27 < 3$; г) $\log_{x+1} 3 > 2$.
6. а) $\lg^2(2x+3) - 12\lg(2x+3) + 20 \leq 0$; б) $2\log_{\frac{1}{5}} 6x - 5\log_{\frac{1}{5}} 6x + 3 > 0$;
 в) $\frac{1}{1+\log_3 x} + \frac{1}{1-\log_3 x} < 2$; г) $\log_2^2(x-1)^2 - \log_{0,5}(x-1) - 5 \leq 0$.
7. **Работайте в группах!** а) $\log_{0,3}\left(\lg \frac{x^2-1}{x+3}\right) \geq 0$; б) $\frac{\log_4(2-3x)}{x-4} < 0$;
 в) $\log_2(x-1) - \log_2(x+1) + \log_{\frac{x+1}{x-1}} 2 \leq 0$; г) $\frac{\ln 6 - \ln(10-x^2)}{\ln(x+2)} < 0$.

C₁

8. (2011) Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство $2 + \frac{\log_2^2 |x|}{1 + \log_2 |x|} > \log_2 |x|$.
9. (2012) Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство $(2x^2 + 11x - 6) \cdot \sqrt{\log_{0,7} |x+6|} \geq 0$.
10. (2015) Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство $|x| \log_3(3-x) \leq 0$.
- 11*. Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство: а) $\log_3 |x+5| - \log_{\frac{1}{3}} |x-1| \geq \log_3 x$; б) $\frac{\log_{0,2} |x+1|}{x^2-9x} > 0$.
- 12*. Дано неравенство $\left(\log_2 \frac{4a+4}{a}\right) \cdot x^2 + 2\left(\log_2 \frac{2a}{a+1}\right) \cdot x + \log_2 \frac{(a+1)^2}{4a^2} > 0$. Найдите все значения параметра a , при которых неравенство верно для любых действительных значений x . (Математическая Олимпиада Республики Молдова, 2012)

Упражнения и задачи на повторение



Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт

A

1. Дана функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: а) $f(x) = (2-\sqrt{3})x + \sqrt{5}$; б) $f(x) = (\sqrt{3}-2)x - 7$; в) $f(x) = \frac{2}{17}x - \frac{3}{53}$
 1) Найдите нули функции.
 2) Найдите промежутки, на которых функция f принимает положительные значения.
 3) Постройте график G_f .
2. **Работайте в парах!** У Ольги 500 леев. Ежемесячно она добавляет к этой сумме по 80 леев.
 а) Задайте функцию, описывающую зависимость накопленной суммы денег от количества месяцев.
 б) Через сколько месяцев она соберет 1900 леев, необходимых для покупки микрокалькулятора?
3. Температура Земли на поверхности равна 20°C , на глубине 2 км температура равна 90°C , а на глубине 10 км – 370°C .
 а) Предположив, что зависимость между глубиной и температурой является зависимостью линейного типа, задайте соответствующую функцию.
 б) Найдите температуру Земли на глубине 3,5 км.

4. Плата за аренду автомобиля за 1 день зависит от пройденного расстояния и равна (например):
 41 \$ за 100 миль; 51,8 \$ за 160 миль; 63,5 \$ за 225 миль.
 а) Покажите, что зависимость платы за аренду от количества пройденных миль автомобилем является зависимостью линейного типа и задайте соответствующую функцию.
 б) Какую сумму следует заплатить, если автомобиль прошел 200 миль?

В

5. Найдите область определения функции $f: D \rightarrow \mathbb{R}$: а) $f(x) = (x-1)^{\frac{1}{2}} + (x+3)^2$; б) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$.
6.  **Работайте в парах!** Найдите промежутки, на которых функция $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ принимает положительные значения, если:
 а) $f(x) = x^2 + x - 6$; б) $f(x) = \frac{4}{2-x}$; в) $f(x) = \log_6(x+2)$; г) $f(x) = \frac{1}{3}x - \frac{2}{5}$.
7. Высота над землей подброшенного вверх мяча вычисляется по формуле $h(t) = -t^2 - 0,5t + 1,5$, где h – высота в метрах, t – время в секундах, $t \in [0; 1,5]$.
 а) Найдите момент времени t , в котором мяч находится на максимальной высоте.
 б) Через какой промежуток времени мяч упадет на землю?
8. Уровень воды в реке Южной Америки поднялся после дождя. Затем уровень воды начал падать по 3 цоля в час (1 цоль = 2,54 см) и в настоящее время он на 3 стопы выше нормального уровня (1 стопа = 30 см). Предположив, что уровень воды понижается равномерно, запишите функцию 1 степени, задающую зависимость уровня воды (того, что выше нормы) от времени. Через какой промежуток времени уровень воды будет нормальным?

С

9.  **Исследуйте!** Используя свойства изученных функций, в том числе их графики, сравните:
 а) $\sqrt[3]{720}$ с $\sqrt[3]{722}$; б) $\sqrt[3]{-91}$ с $-\sqrt[3]{91,2}$; в) $(\sqrt{2}-1)^{15}$ с 1;
 г) $3^{-\frac{2}{7}}$ с $4^{-\frac{2}{7}}$; д) $\log_3 \pi$ с $\log_3 3,1$; е) $\log_{0,1} \pi$ с $\log_{0,1} \pi^2$.

10.  **Работайте в группах!**  **Проект:** Приложения показательной функции в различных областях.

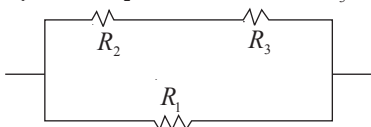
Реальный профиль

A₁

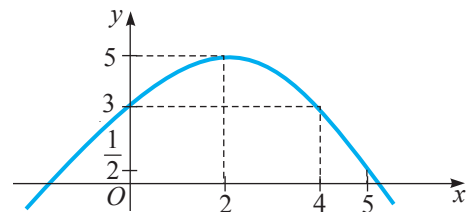
1. Используя свойства изученных функций, сравните:
 а) $\sqrt[3]{\pi}$ с $\sqrt[3]{\frac{17}{5}}$; б) $(1,7)^{\frac{5}{3}}$ с $(\sqrt{3})^{\frac{5}{3}}$; в) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{2}{5}}$ с $(\sqrt{2})^{-3}$;
 г) $\log_{0,9}(2-\sqrt{3})$ с $\log_{0,9}\sqrt[3]{2}$; д) $\log_{\sqrt{3}} 17$ с $\log_3 5$.
2. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение: а) $(\sqrt{3})^x = -1$; б) $15^x = 3^x \cdot 5^{\sqrt{2}}$; в) $\log_{\sqrt{3}}(|x|+2) = -2$;
 г) $\log_2 3x = \log_{32} 21$; д) $\sqrt{x+2} = 0,5 - \sqrt{3}$; е) $\pi^{x^2+4} = \pi^2$.
3.  **Работайте в парах!** Найдите область определения функции, заданной формулой:
 а) $f(x) = \sqrt{3-x} + \frac{1}{\sqrt{x^2-5x-6}}$; б) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}} - \sqrt{x}$; в) $f(x) = (x+1)^{-\frac{1}{2}}$.

B₁

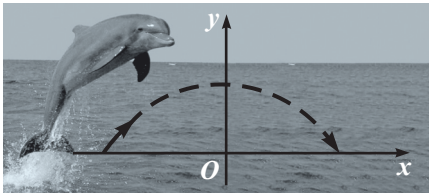
4. Для заданной электрической цепи известно, что: $R_{\text{общее}} = 2,25 \Omega$, $R_1 = 3 \Omega$, $R_2 = 4 \Omega$. Найдите R_3 .



5. Используя данные рисунка, задайте соответствующую функцию II степени $f(x) = ax^2 + bx + c$.

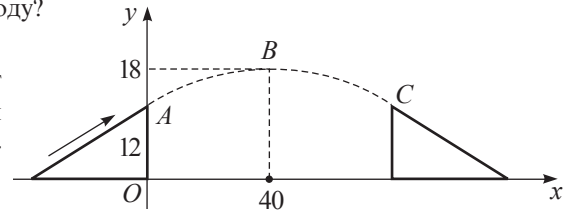


6.  (2024) Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство $(3 \cdot 9^x - 4 \cdot 3^x + 1)\sqrt{1-x} \leq 0$.



7. Дельфин прыгает из воды по траектории: $y = -\frac{5}{36}x^2 + 20$.

- а) Какую максимальную высоту достигнет дельфин?
 б) Каково расстояние между точкой выхода из воды и точкой входа дельфина в воду?



8. Мотоциклист движется по наклонной плоскости, пролетает по воздуху и затем продолжает движение по другой наклонной плоскости. Используя данные рисунка, задайте функцию II степени, частью графика которой является траектория ABC.

C₁

9*. Положительное действительное число x удовлетворяет неравенству

$$|\log_9 x^{2x} - \log_{\sqrt{3}} \sqrt{x}| + ||1-x| - |\log_3 x|| \leq (x-1) \log_{27} x^{x^3}.$$

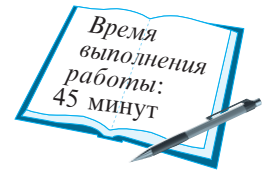
Найдите число $\log_3 \frac{9x}{3^x}$. (Математическая Олимпиада Республики Молдова, 2010)



10. **Работайте в группах!**



Проект: Приложения показательной функции в экономике.



Итоговый тест II

Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт

- Известно, что выполняется неравенство $(\sqrt{5})^m < (\sqrt{5})^n$.
Впишите в рамку один из знаков $<$, $>$, чтобы полученное высказывание было истинным. m n
- Дана пара чисел $0,1^{-3}$ и 10^{-2} . Определите, какое из них больше.
- Найдите, при каких значениях x существует логарифм: $\log_{1,2}(x^2 - 5x - 6)$.
- а) Постройте график функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$.
 б) Укажите букву **И**, если высказывание истинно, или букву **Л**, если оно ложно:
 „Функция f строго возрастает на $\mathbb{R}$ ”. **И** **Л**
 в) Определите свойства функции f .
- Если сложить возрасты отца и сына, то получим 52 года. Через 8 лет значение отношения возраста отца к возрасту сына будет равно 3. Найдите возраст отца и возраст сына.

Реальный профиль

- Укажите букву **И**, если высказывание истинно, или букву **Л**, если оно ложно:
 „ $\log_2 |1-x|$ существует при $x \in \mathbb{R}$ ”. **И** **Л**
- Дана функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5^{1-x}$.
Впишите в рамку один из знаков $\in$, $\notin$, чтобы полученное высказывание было истинным. $A(3; 25)$ G_f .
- Доходы (в тыс. леев) фирмы по продаже автомобилей на протяжении 10 месяцев изменялись согласно закону:

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2, & 0 \leq x \leq 2 \\ -2x^2 + 20x - 32, & 2 < x \leq 10. \end{cases}$$
 а) Изобразите графически доходы фирмы.
 б) Определите: 1) в какие из этих 10 месяцев доходы были максимальными;
 2) периоды времени, когда фирма работала в убыток;
 3) периоды возрастания доходов;
 4) периоды убывания доходов.
- Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $4\log_4^2(-x) + 2\log_4 x^2 = -1$.
- Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство $9^{2x-\sqrt{x^2-1}} - 4 \cdot 3^{2x+1-\sqrt{x^2-1}} + 27 \geq 0$.
- Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $36^{|x|} - 2 \cdot 6^{|x|} + a = 0$, где a – действительный параметр.

модуль 8

Элементы тригонометрии

Математика – это гимнастика ума.
Норберт Виннер

Цели

- *измерение углов с использованием различных единиц измерения;
- *использование тригонометрической окружности при решении задач;
- *применение свойств тригонометрических функций и свойств обратных тригонометрических функций;
- *распознавание и применение основных тригонометрических тождеств и формул в различных контекстах;
- *распознавание тригонометрических уравнений и неравенств, применение адекватных методов их решения;
- *применение тригонометрии в различных областях.

§1 Тригонометрические функции

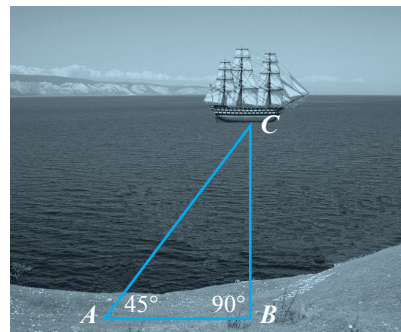
1.1. Системы измерения углов и дуг. Обобщение понятий *угол* и *дуга*

○ Исследуем

Знаете ли, что...

древние греки первыми научились определять расстояние от берега до корабля, находящегося в море. Пользуясь рисунком, объясните, как поступали древние греки.

Заключение: этот способ может быть использован в аналогичных ситуациях (приведите примеры). Следовательно, элементы тригонометрии, величины углов применимы в различных областях, в том числе в повседневной жизни.



1 Градусная мера

Известно, что каждой дуге окружности соответствует однозначно определенный центральный угол. В тригонометрии применяются две единицы измерения углов: градус и радиан.

Единицей измерения в градусной системе измерения является **градус** (1°), определенный как величина угла, равного $\frac{1}{90}$ части прямого угла. $\frac{1}{60}$ часть градуса равна **1 минуте** ($1'$), а $\frac{1}{60}$ часть минуты равна **1 секунде** ($1''$).

Следовательно, $1^\circ = 60'$, $1' = 60''$.

Градусная мера развернутого угла равна 180° (вдвое больше, чем мера прямого угла); градусная мера полного угла равна 360° .

2 Радианная мера

Радианная система измерения углов и дуг базируется на утверждении, что отношение длины дуги, соответствующей некоторому центральному углу, к длине радиуса окружности – это постоянная величина, не зависящая от длины радиуса.



Определение

Пусть l – длина дуги окружности радиуса r . **Радийной мерой** центрального угла (дуги) называется отношение длины дуги, соответствующей этому углу, к длине радиуса окружности: $\alpha = \frac{l}{r}$. (1)

Если в формуле (1) положим $l = r$, то $\alpha = 1$ радиан. **Углом в один радиан** (сокращенно **рад**) называется центральный угол, которому соответствует дуга, длина которой равна длине радиуса (рис. 8.1).

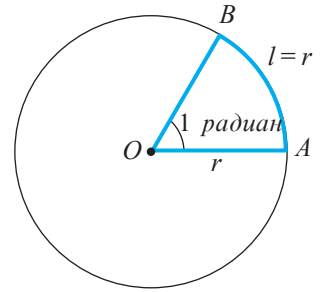


Рис. 8.1

Примеры

1. Радийная мера (α) полного угла равна 2π рад. Действительно, так как длина окружности равна $2\pi r$, то $\alpha = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$ рад, где $\pi \approx 3,1416$.
2. Радийная мера развернутого угла равна π рад, а прямого угла равна $\frac{\pi}{2}$ рад.



Переход от градусной меры к радийной осуществляется на основании соотношения

$$\frac{a}{\alpha} = \frac{180^\circ}{\pi}, \quad (2)$$

где a – градусная мера угла, а α – радийная мера угла.

Из (2) следует, что $\alpha = \frac{a}{180^\circ} \cdot \pi \text{ рад}, \quad a = \frac{\alpha}{\pi} \cdot 180^\circ$.

Примеры

1. Угол в 45° имеет радийную меру $\alpha = \frac{45^\circ}{180^\circ} \pi = \frac{\pi}{4}$.
2. Угол в 1 радиан имеет градусную меру $a = \frac{180^\circ \cdot 1}{\pi} \approx \frac{180^\circ}{3,1416} \approx 57^\circ 17' 44''$.
3. Угол в 2,5 радиан имеет градусную меру $a = \frac{2,5}{\pi} \cdot 180^\circ \approx 143^\circ$.



Ориентированные углы и дуги



В геометрии угол рассматривается как объединение двух замкнутых полупрямых с общим началом. Однако это понятие не применимо в некоторых случаях. Например, недостаточно сказать „Покрутите гайку на 30° “ – необходимо задать и направление поворота. Часто приходится поворачивать некоторую ось, ключ на угол больший, чем 360° . Для решения этих задач обобщим понятие угла и дуги, рассматривая **ориентированные углы и дуги**.

На плоскости рассматривают два направления для вращения луча вокруг своего начала – **положительное** (против часовой стрелки) и **отрицательное** (по часовой стрелке). Направление вращения указывается стрелкой (рис. 8.2).

Принято считать, что ориентированный угол AOM (точки A, M лежат на окружности) задается лучом $[OA$, который вращается вокруг своего начала. Так как одна из сторон произвольного ориентированного угла AOM совпадает с положительной полуосью $[Ox$, то в последующем будем считать, что вторая его сторона (а значит и угол AOM) задается лучом $[OM$. Угол AOM (и дуга, которую описывает точка A) называется **положительным** или **отрицательным** в зависимости от направления вращения луча $[OA$ вокруг своего начала.

Пусть луч $[OM$ составляет с положительным направлением оси Ox угол величиной α ($0 < \alpha < 2\pi$). Если луч $[OM$ совершит еще n полных оборотов ($n \in \mathbb{N}^*$) в положительном (или в отрицательном) направлении, то величина полученного ориентированного угла равна $\alpha + 2\pi n$ (или $\alpha - 2\pi n$). На рисунке 8.2 луч $[OK$ образует с лучом $[OA$ несколько

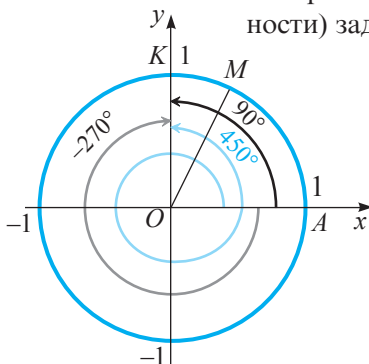


Рис. 8.2

углов: первый величиной в 90° (или $\frac{\pi}{2}$), второй величиной в 450° (или $\frac{5\pi}{2}$), третий величиной -270° (или $-\frac{3\pi}{2}$). Обобщая сказанное, делаем вывод, что величина любого ориентированного угла, образованного лучами $[OK$ и $[OA$, задается формулой:

$$\alpha = 90^\circ + n \cdot 360^\circ, n \in \mathbb{Z} \text{ (или } \alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot n, n \in \mathbb{Z}).$$

О Запомните!

Тригонометрической окружностью называется окружность единичного радиуса с центром в начале координат.

Как правило, рассматриваются углы, заданные полупрямой $[OM$ и положительной полуосью $[Ox$, где M принадлежит тригонометрической окружности (рис. 8.2). Говорят, что угол $АОМ$ принадлежит I, II, III или IV четверти, если точка M принадлежит I, II, III или IV четверти соответственно.

В этих условиях получаем биективное соответствие между множеством ориентированных углов (множеством дуг) и множеством действительных чисел при выбранной единице измерения – градус или радиан. Учитывая это соответствие, условимся, что через α , β и т. д. обозначим и угол, и его величину.

1.2. Тригонометрические функции синус, косинус, тангенс, котангенс, секанс, косеканс

Задача

Определим высоту телеграфного столба, перпендикулярного поверхности земли, используя при этом только инструмент для измерения длины.

Решение:

Обозначим: AB – высота столба, d – прямая, проходящая через точку A перпендикулярно к AB (рис. 8.3). В точке A_1 ($A_1 \neq A$) вертикально устанавливаем (параллельно AB) прямолинейный шест $[A_1B_1]$, длина которого известна. Визуально на прямой d определяем расположение точки O так, чтобы точки O , B_1 , B были коллинеарны. Очевидно, что прямоугольные треугольники OA_1B_1 и OAB подобны (Обоснуйте!), поэтому $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{OA}{OA_1}$, откуда $AB = \frac{A_1B_1}{OA_1} \cdot OA$. Поскольку мы можем найти длины отрезков OA_1 , A_1B_1 , OA , то вычислим и высоту столба AB .

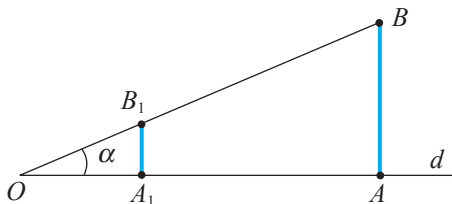


Рис. 8.3

Исходя из того, что в прямоугольных (подобных) треугольниках OA_1B_1 , OAB (рис. 8.3) значение отношений вида $\frac{A_1B_1}{OA_1}$, $\frac{AB}{OA}$ – постоянная величина, были введены понятия *синус*, *косинус*, *тангенс*, *котангенс* для острых углов. А именно:

$$\sin \alpha = \frac{AB}{OB}, \cos \alpha = \frac{OA}{OB}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{AB}{OA}, \operatorname{ctg} \alpha = \frac{OA}{AB}.$$

Определение тригонометрических функций для произвольного угла основывается на следующей лемме:

О Лемма

Если лучи $[OM_1]$, $[OM_2]$ совпадают ($M_1 \neq O$, $M_2 \neq O$), то $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$, $\frac{x_1}{OM_1} = \frac{x_2}{OM_2}$, $\frac{y_1}{OM_1} = \frac{y_2}{OM_2}$, где $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ – точки, заданные в прямоугольной системе координат xOy и $y_1 \cdot y_2 \neq 0$ (рис. 8.4).

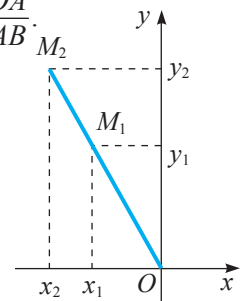


Рис. 8.4

Определения

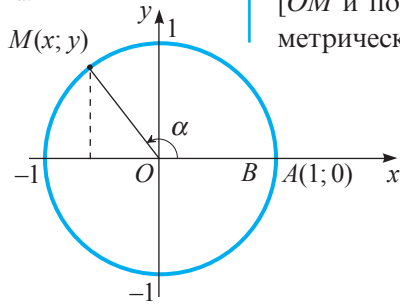


Рис. 8.5

Пусть даны тригонометрическая окружность и угол α , образованный лучом $[OM$ и положительной полуосью $[Ox$ (точка $M(x, y)$ принадлежит тригонометрической окружности) (рис. 8.5).

- **Синусом** угла α называется ордината точки M (то есть $\sin \alpha = y$).
- **Косинусом** угла α называется абсцисса точки M (то есть $\cos \alpha = x$).
- **Тангенсом** угла α называется отношение ординаты к абсциссе точки M (то есть $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$).
- **Котангенсом** угла α называется отношение абсциссы к ординате точки M (то есть $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{x}{y}$, $\alpha \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$).

Замечание

Таким образом, фактически определены числовые функции на подмножествах множества действительных чисел, так как радианная мера любого угла является действительным числом.

Определения

Называется функцией:

- **синус** – функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$;
- **косинус** – функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$;
- **тангенс** – функция $f: \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{tg} x$;
- **котангенс** – функция $f: \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{ctg} x$.

Замечание

В некоторых случаях используются также и функции:

секанс – функция $f: \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sec x = \frac{1}{\cos x}$;

косеканс – функция $f: \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$.

Запомните!

Функции синус, косинус, тангенс, котангенс, секанс и косеканс называются **тригонометрическими функциями** и обозначаются **sin, cos, tg, ctg, sec** и **cosec** соответственно.

Задание с решением

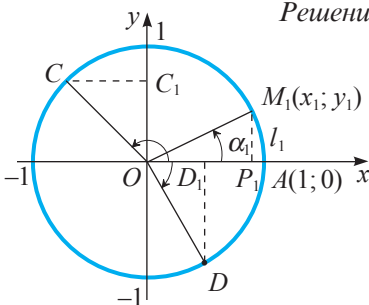


Рис. 8.6

Вычислим значения тригонометрических функций $\sin$, $\cos$, tg , ctg для следующих величин углов 0 , $\frac{3\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{3}$.

Решение:

Углы 0 , $\frac{3\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{3}$ заданы лучами $[OA$, $[OC$, $[OD$ соответственно (рис. 8.6).

Так как величины углов COC_1 и DOD_1 равны $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{3}$ соответственно, то из треугольника OC_1C и треугольника OD_1D получаем

$OC_1 = CC_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $DD_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $OD_1 = \frac{1}{2}$. Это позволяет найти координаты соответствующих точек: $A(1, 0)$, $C\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $D\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Таким образом, по определению тригонометрических функций, имеем:

$$\sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4} = \operatorname{ctg} \frac{3\pi}{4} = -1;$$

$$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}, \quad \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\sin 0 = 0, \quad \cos 0 = 1, \quad \operatorname{tg} 0 = 0, \text{ а } \operatorname{ctg} 0 \text{ не существует.}$$

Аналогично получаем значения тригонометрических функций для других часто используемых углов (таблица 1).

Таблица 1

α (радиан)		0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$
α (градус)		0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	-30°	-45°	-60°	-90°
Значение функции	$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
	$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
	$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	не су- ществ.	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	не су- ществ.
	$\operatorname{ctg} \alpha$	не су- ществ.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	не су- ществ.	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

1.3. Основные свойства тригонометрических функций

1. Функция $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \sin x$

1° *Область определения.* $D(\sin) = \mathbf{R}$, так как для любого $\alpha \in \mathbf{R}$ однозначно определяется ордината точки M тригонометрической окружности, где луч $[OM]$ образует угол α с положительной полуосью Ox (рис. 8.7).

2° *Множество значений.* $E(\sin) = [-1, 1]$. Включение $E(\sin) \subseteq [-1, 1]$ очевидно, так как $|\sin \alpha| = |y_M| \leq 1$ для любого $\alpha \in \mathbf{R}$.

Обратное включение $[-1, 1] \subseteq E(\sin)$ получим, пользуясь тригонометрической окружностью. Для любого $a \in [-1, 1]$ рассмотрим на оси Oy точку $K(0, a)$ (рис. 8.7). Прямая, параллельная оси Ox и проходящая через точку K , пересекает тригонометрическую окружность хотя бы в одной точке, M . Из построения следует, что для любого угла α , заданного лучом $[OM]$, имеем $\sin \alpha = a$, то есть a является значением функции синус. Итак, $E(\sin) = [-1, 1]$.

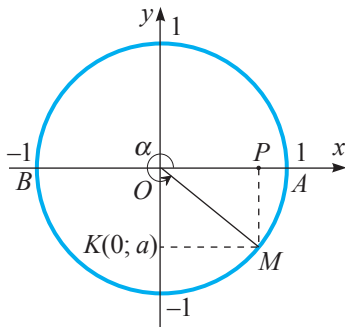


Рис. 8.7

3° *Нули* функции синус являются решениями уравнения $\sin t = 0$, то есть соответствующая точка имеет ординату $y = 0$. Точки имеют нулевую ординату, если они лежат на оси Ox . На рисунке 8.7 – это точки A и B . Величины углов, заданные лучом $[OA]$, равны $0 + 2\pi \cdot k$, $k \in \mathbf{Z}$, а величины углов, заданные лучом $[OB]$, равны $\pi + 2\pi \cdot m$, $m \in \mathbf{Z}$. Объединением этих двух числовых множеств является множество $\{\pi k \mid k \in \mathbf{Z}\}$. Таким образом, нулями функции синус являются значения $x \in \{\pi k \mid k \in \mathbf{Z}\}$. Координаты точки пересечения графика функции синус с осью Oy задаются равенством $\sin 0 = 0$, то есть график пересекает ось Oy в единственной точке с координатами $(0; 0)$.

4° *Периодичность.* Из определения функции синус следует, что $\sin(\alpha + 2\pi) = \sin(\alpha - 2\pi) = \sin \alpha$, так как углы α , $\alpha \pm 2\pi$ задаются одним и тем же лучом. Это означает, что число $T = 2\pi$ является периодом функции синус. Докажем, что $T = 2\pi$ является *основным периодом* функции синус (наименьшим положительным периодом). Допустим, что существует меньший период T_1 , $T_1 > 0$. Тогда $\sin x = \sin(x + T_1)$, $\forall x \in \mathbf{R}$. В частности, для $x = 0$ имеем $0 = \sin 0 = \sin T_1$. Поскольку число T_1 является

нулем функции синус, оно приобретает вид $T_1 = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Единственным положительным числом вида $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, меньше, чем 2π , является $T_1 = \pi$. Если бы число π было периодом, то мы бы получили, что $\sin x = \sin(x + \pi)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Но это равенство не выполнимо для всех $x \in \mathbb{R}$.

Например, для $x = \frac{\pi}{2}$ получаем: $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ и $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) = -1$. Значит, число π не является периодом. Таким образом, основным периодом функции синус является 2π .

О Запомните!

На основании свойств периодических функций делаем вывод, что достаточно исследовать свойства функции синус на любом отрезке длины 2π .

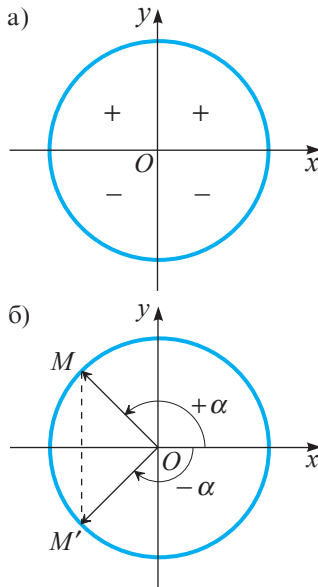


Рис. 8.8

5° Знак функции синус совпадает со знаком ординаты соответствующей точки тригонометрической окружности. Ордината точки положительна, если точка лежит выше оси Ox , а это означает, что соответствующий луч задает угол α , принадлежащий промежуткам $(2\pi k, \pi + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$. В этом случае угол α принадлежит I или II четверти (рис. 8.8 а)). Если $\alpha \in (2\pi k - \pi, 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$, то есть угол α принадлежит III или IV четверти, то функция синус принимает отрицательные значения (рис. 8.8 а)).

6° Четность или нечетность. Если луч $[OM$ задает угол α , а луч $[OM'$ задает угол $-\alpha$ (рис. 8.8 б)), то точки M, M' , лежащие на тригонометрической окружности, симметричны относительно оси Ox . Тогда для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ получим: $\sin(-\alpha) = y_{M'} = -y_M = -\sin \alpha$.

Значит, функция синус нечетная.

7° Монотонность. В § 2 будет доказано, что функция синус строго возрастает на каждом из отрезков $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in \mathbb{Z}$, на которых принимает значения от -1 до 1 , и строго убывает на каждом из отрезков $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in \mathbb{Z}$, на которых принимает значения от 1 до -1 .

8° Экстремумы. Из свойства монотонности функции синус следует, что точки $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, являются точками локального максимума этой функции и $y_{\max} = f\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = 1$, а точки $\frac{3\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, являются точками ее локального минимума и $y_{\min} = f\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right) = -1$.

9° График функции синус на отрезке $[0, 2\pi]$ проще построить при помощи тригонометрической окружности, учитывая при этом, что $2\pi \approx 6,28$ (рис. 8.9).

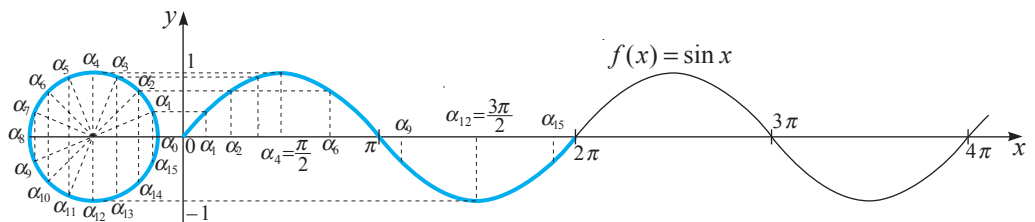


Рис. 8.9

В силу периодичности функции синус, достаточно построить ее график на отрезке $[0, 2\pi]$, а потом повторить его на отрезках $[2\pi, 4\pi]$, $[-2\pi, 0]$, ... и т. д.



II. Функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \cos x$

Свойства функции косинус получаем аналогично свойствам функции синус.

1° $D(\cos) = \mathbb{R}$.

2° $E(\cos) = [-1, 1]$.

3° Нулями функции косинус являются значения $x \in \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$, а ее график пересекает ось Oy в точке $(0, 1)$.

4° Функция косинус периодическая; ее основной период равен 2π .

5° Знаки функции косинус совпадают со знаками абсцисс соответствующих точек тригонометрической окружности: значения функции косинус положительны, если угол α лежит в IV или I четверти ($\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k \right), k \in \mathbb{Z}$), и ее значения отрицательны, если угол α лежит во II или III четверти ($\alpha \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \right), k \in \mathbb{Z}$).

6° Функция косинус четная, так как, если лучи $[OM]$ и $[OM']$ задают соответственно углы α и $-\alpha$, то точки M, M' тригонометрической окружности симметричны относительно оси Ox и у них одинаковые абсциссы. Следовательно, $\cos(-\alpha) = \cos \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$.

7° Функция косинус строго возрастает на каждом из отрезков $[\pi + 2\pi k, 2\pi + 2\pi k], k \in \mathbb{Z}$, на которых она принимает значения от -1 до 1 (четверти III, IV), и строго убывает на каждом из отрезков $[2\pi k, \pi + 2\pi k], k \in \mathbb{Z}$, на которых принимает значения от 1 до -1 (четверти I, II).

8° Для функции косинус точки $2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, являются точками локального максимума и $y_{\max} = f(2\pi k) = 1$, а точки $\pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, являются точками локального минимума и $y_{\min} = f(\pi + 2\pi k) = -1$.

9° График функции косинус изображен частично на рисунке 8.10.

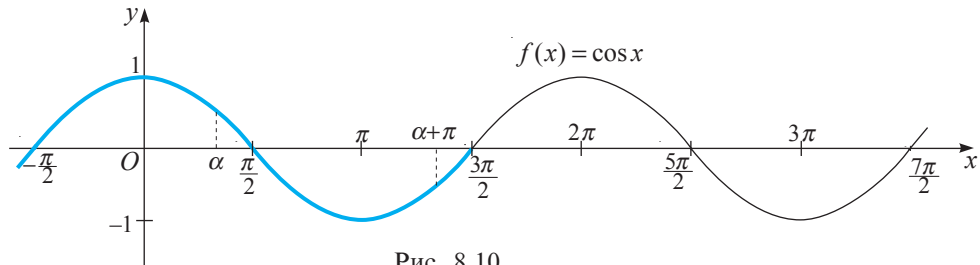


Рис. 8.10

III. Функция $f: D \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{tg} x$

1° $D(\operatorname{tg}) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

2° $E(\operatorname{tg}) = \mathbb{R}$. Для любого $a \in \mathbb{R}_+$ существует такой угол α , при котором $\operatorname{tg} \alpha = a$, поскольку $\operatorname{tg} \alpha = \frac{MP}{OP} = \frac{AB}{OA} = \frac{a}{1} = a, \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right)$ (рис. 8.11).

Аналогично для $a \in \mathbb{R}_-$ и $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0 \right]$.

Ордината точки пересечения полупрямой $[OM]$ с касательной AB к тригонометрической окружности в точке $A(1, 0)$ равна $\operatorname{tg} \alpha$. Поэтому прямая AB называется **осью тангенсов**. Значит, $\operatorname{tg} \alpha = a = y_B$.

3° Нули функции тангенс совпадают с нулями функции синус: $x \in \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

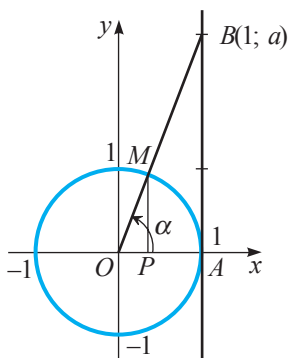


Рис. 8.11

4° Функция тангенс – периодическая. Можно доказать, что ее основной период равен π .

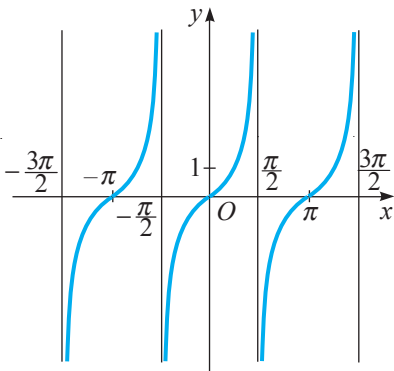


Рис. 8.12

5° Функция тангенс принимает положительные значения в I и III четвертях, где значения функций синус и косинус одинакового знака, и отрицательные значения – во II и IV четвертях, где значения функций синус и косинус различного знака.

6° Функция тангенс нечетная, так как для любого $\alpha \in D(\text{tg})$ имеем:

$$\text{tg}(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\text{tg} \alpha.$$

7° Функция тангенс строго возрастает на каждом из промежутков $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$ (рис. 8.12).

8° Функция тангенс не имеет экстремумов.

9° График функции тангенс изображен частично на рисунке 8.12.

IV. Функция $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \text{ctg } x$

1° $D(\text{ctg}) = \mathbb{R} \setminus \{\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

2° $E(\text{ctg}) = \mathbb{R}$ (рис. 8.13). Абсцисса точки $B(a, 1)$ равна $\text{ctg} \alpha$, то есть $a = \text{ctg} \alpha$. Поэтому прямая AB называется *осью котангенсов*. Значит, $\text{ctg} \alpha = a = x_B$.

3° Нулями функции котангенс являются значения:

$$x \in \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

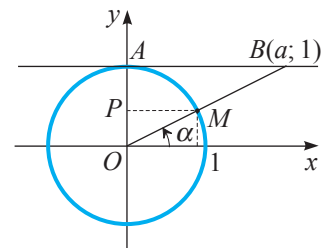


Рис. 8.13

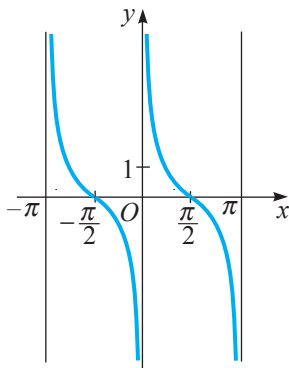


Рис. 8.14

4° Основной период функции котангенс равен π .

5° Функция котангенс принимает положительные значения в I и III четвертях и отрицательные – во II и IV четвертях.

6° Функция котангенс нечетная:

$$\text{ctg}(-x) = -\text{ctg } x, x \in D(\text{ctg}).$$

7° Функция котангенс строго убывает на каждом из промежутков $(\pi k, \pi + \pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$ (рис. 8.14).

8° Функция котангенс не имеет экстремумов.

9° График функции котангенс изображен частично на рисунке 8.14.

Приведем несколько примеров, которые решаются на основании свойств тригонометрических функций.



Задания с решением

1. Определим знак произведения $a = \cos \frac{2\pi}{5} \sin \frac{2\pi}{3} \text{tg} \frac{\pi}{4} \cos \frac{4\pi}{3} \text{ctg} \frac{5\pi}{3}$.

Решение:

Заметим, что углы в $\frac{2\pi}{5}$ рад, $\frac{\pi}{4}$ рад принадлежат I четверти, угол в $\frac{2\pi}{3}$ рад – II четверти, угол в $\frac{4\pi}{3}$ рад – III четверти, угол в $\frac{5\pi}{3}$ рад – IV четверти.

Так как $\cos \frac{2\pi}{5} > 0$, $\sin \frac{2\pi}{3} > 0$, $\text{tg} \frac{\pi}{4} > 0$, $\cos \frac{4\pi}{3} < 0$, $\text{ctg} \frac{5\pi}{3} < 0$, то число a положительно.

2. Определим знак значения выражения $\frac{\cos 10^\circ - \cos 9^\circ}{2 - \sin 2}$.

Решение:

Так как $0^\circ < 9^\circ < 10^\circ < 180^\circ$, а функция косинус на отрезке $[0^\circ, 180^\circ]$ строго убывающая, то $\cos 9^\circ > \cos 10^\circ$. Следовательно, $\cos 10^\circ - \cos 9^\circ < 0$, то есть числитель отрицательный. Знаменатель положительный, так как $\sin 2 < 1$. Таким образом, значение исходного выражения отрицательно.

1.4. Основные тригонометрические тождества

Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$, $M(\cos \alpha, \sin \alpha)$ – соответствующая точка тригонометрической окружности. Так как координатами начала координат являются $(0, 0)$, то для длины отрезка OM (радиус тригонометрической окружности) получаем:

$$1 = \sqrt{(\cos \alpha - 0)^2 + (\sin \alpha - 0)^2} = \sqrt{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}.$$

Отсюда следует **основное тригонометрическое тождество**:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \alpha \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Перемножив выражения для функций тангенса и котангенса (см. определения), получим:

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1 \text{ или } \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}, \text{ или } \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}. \quad (4)$$

Разделив обе части тождества (3) на $\sin^2 \alpha$ или на $\cos^2 \alpha$, получим:

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \alpha \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}; \quad 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}. \quad (5)$$

Упражнения и задачи



Реальный профиль

A₁

- Выразите в радианах величину угла:
 - $45^\circ, 20^\circ, 110^\circ$;
 - $60^\circ, -78^\circ, 270^\circ$;
 - $-120^\circ, -31^\circ, 180^\circ$;
 - $150^\circ, -218^\circ, -90^\circ$.
- Выразите в градусах величину угла:
 - $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{4}$;
 - $\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{5}, -2\pi$;
 - $\frac{2\pi}{7}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$;
 - $\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{18}, \frac{3\pi}{2}$.
- Вычислите значение выражения:
 - $\sin 90^\circ + \cos 270^\circ - \sin^2 45^\circ$;
 - $\operatorname{tg} \pi - \cos^2 \frac{\pi}{6} + \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3}$;
 - $5 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{4} - 2 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} + \sin 2\pi$;
 - $-4 \sin \frac{3\pi}{2} + 0,5 \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} + \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{2}$.
- Исследуйте!** Возможно ли, чтобы синус и косинус одного и того же угла соответственно были бы равны:
 - $\frac{1}{2}$ и $-\frac{\sqrt{3}}{2}$;
 - $-\frac{7}{25}$ и $-\frac{24}{25}$;
 - 0,3 и 0,9;
 - $\frac{2}{\sqrt{3}}$ и $-\frac{1}{\sqrt{3}}$?
- Исследуйте!** Возможно ли, чтобы тангенс и котангенс одного и того же угла соответственно были бы равны:
 - $\frac{2}{3}$ и $-\frac{3}{2}$;
 - $-\frac{3}{7}$ и $-\frac{7}{3}$;
 - $\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{2\sqrt{3}}{3}$;
 - $\sqrt{5} - 2$ и $\sqrt{5} + 2$?
- Упростите выражение:
 - $\cos^2 \alpha - \cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha + \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha$;
 - $\sin \alpha - \sin^3 \alpha - \cos \alpha + \cos^3 \alpha$;
 - $\frac{4}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{4}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} - 5$;
 - $(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha)(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha)$;
 - $(1 - \cos^2 x)(1 + \operatorname{tg}^2 x)$;
 - $\sin^4 x + \cos^2 x - \cos^4 x$.

В₁

7. Вычислите:

а) $3\cos 0^\circ - 2\sin \frac{\pi}{2} + 6\operatorname{tg}\pi$;

б) $\sin 270^\circ + \frac{1}{2}\operatorname{ctg} 90^\circ - 2\cos 0^\circ$;

в) $\operatorname{tg} 60^\circ \cos 60^\circ - 4\sin 90^\circ \cos 45^\circ$;

г) $\cos 60^\circ + \frac{1}{3}\operatorname{tg} 30^\circ \cdot \sin 30^\circ$.

8. Вычислите значение выражения:

а) $E = \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{2} + \cos \pi$;

б) $E = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} + \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} + \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} + \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2}$.

9. Найдите $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$, если:

а) $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ и $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$;

б) $\operatorname{ctg} \alpha = 1,5$ и α принадлежит III четверти;

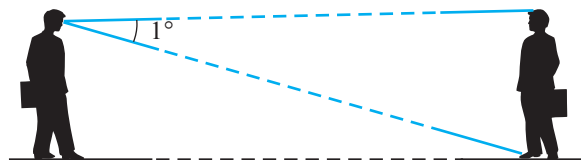
в) $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ и $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$;

г) $\operatorname{tg} \alpha = 2$ и $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

10. Найдите гипотенузу и величины углов прямоугольного треугольника, катеты которого равны:

а) 4 см и $4\sqrt{3}$ см;

б) 1 см и $\sqrt{3}$ см.

11.  **Работайте в парах!** Найдите величины углов ромба, если его сторона равна 2 см, а высота $\sqrt{2}$ см.12. Найдите расстояние между двумя людьми (их рост равен 1,7 м), если один из них видит другого под углом 1° .13. Выразите в радианах величины углов равнобедренного треугольника, один из углов которого равен 30° .

14. Зубчатое колесо имеет 90 зубьев. Выразите в радианах угол, если колесо повернуть на:

а) 30 зубьев; б) 40 зубьев; в) 60 зубьев; г) 100 зубьев.

15. Найдите область определения функции $f: D \rightarrow \mathbb{R}$:

а) $f(x) = \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$;

б) $f(x) = \frac{1}{\operatorname{tg} 2x}$;

в) $f(x) = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x$.

16. Определите знак произведения $\cos 110^\circ \sin \frac{5\pi}{3} \cos(-10^\circ) \operatorname{ctg} \left(-\frac{5\pi}{4}\right)$.17. Дана функция $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x \cos x \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Вычислите:

а) $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$;

б) $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$;

в) $f\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$;

г) $f\left(\frac{5\pi}{3}\right)$.

18.  **Исследуйте!** Пользуясь монотонностью тригонометрических функций, определите знак значения выражения:

а) $\frac{\operatorname{tg} 100^\circ - \operatorname{tg} 160^\circ}{\sin(-10^\circ) - \sin(-20^\circ)}$;

б) $\frac{\operatorname{tg} 111^\circ - \operatorname{tg} 105^\circ}{\sin 15^\circ - \cos 10^\circ}$;

в) $\frac{\sin 1 - \sin \frac{\pi}{3}}{\operatorname{tg} \frac{5\pi}{6} - \operatorname{tg} 2}$.

19.  **Исследуйте!** Исследуйте на четность функцию, заданную формулой:

а) $f(x) = \sin x + \cos x$;

б) $f(x) = \sin^2 x + 2$;

в) $f(x) = \sin 2x + \sin^3 x$.

С₁

20. Найдите множество значений функции, заданной формулой:

а*) $f(x) = 3\cos x$;

б*) $f(x) = \frac{1}{\sin x}$;

в*) $f(x) = \frac{4}{\cos x}$;

г) $f(x) = 2\sin x - 3$.

21*. Постройте график функции, заданной формулой:

а) $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$;

б) $f(x) = 3\sin 2x$;

в) $f(x) = |\cos x|$;

г) $f(x) = \frac{1}{2}|\sin x|$.

§2 Преобразования тригонометрических выражений

2.1. Формулы сложения и вычитания

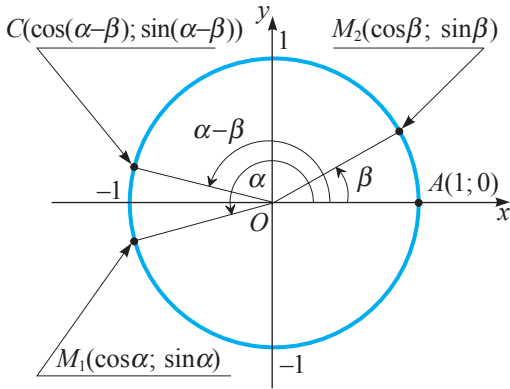


Рис. 8.15

а) Пусть $\alpha \geq \beta$, $\alpha, \beta \in [0, 2\pi)$, $m(\angle AOM_2) = \beta$, $m(\angle AOM_1) = \alpha$, где $A(1; 0)$, $M_1(\cos \alpha; \sin \alpha)$, $M_2(\cos \beta; \sin \beta)$ – точки тригонометрической окружности (рис. 8.15).

Найдем выражение для $\cos(\alpha - \beta)$. Выберем на тригонометрической окружности точку C , удовлетворяющую условию $l_{AM_2C} = l_{ACM_1} - l_{AM_2}$. Это означает, что $m(\angle AOC) = \alpha - \beta$.

Так как дуги AM_2C и M_2CM_1 конгруэнтны, то и соответствующие им хорды также конгруэнтны, то есть $AC = M_1M_2$. Учитывая координаты точек $A(1; 0)$, $M_2(\cos \beta; \sin \beta)$, $C(\cos(\alpha - \beta); \sin(\alpha - \beta))$, $M_1(\cos \alpha; \sin \alpha)$ и применив формулу вычисления длины отрезка, получим:

$$AC^2 = (\cos(\alpha - \beta) - 1)^2 + (\sin(\alpha - \beta) - 0)^2 = \\ = \cos^2(\alpha - \beta) - 2\cos(\alpha - \beta) + 1 + \sin^2(\alpha - \beta) = 2 - 2\cos(\alpha - \beta); \quad (1)$$

$$M_1M_2^2 = (\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2 = \cos^2 \alpha - 2\cos \alpha \cos \beta + \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha - \\ - 2\sin \alpha \sin \beta + \sin^2 \beta = 2 - 2(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta). \quad (2)$$

$$\text{Из (1) и (2) получаем: } \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta. \quad (3)$$

б) Пусть $\beta > \alpha$, $\alpha, \beta \in [0, 2\pi)$. Поскольку косинус – четная функция, то $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\beta - \alpha)$. Заменяя в формуле (3) $\cos(\alpha - \beta)$ на $\cos(\beta - \alpha)$, получим:
 $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\beta - \alpha) = \cos \beta \cos \alpha + \sin \beta \sin \alpha = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$.

Известно, что любые действительные числа α^* , β^* (которые являются величинами углов в радианах) могут быть записаны в виде $\alpha^* = \alpha + 2k\pi$, $\beta^* = \beta + 2n\pi$, $k, n \in \mathbb{Z}$, где $\alpha, \beta \in [0, 2\pi)$. Обобщая сказанное для любых действительных чисел α, β , на основании периодичности функций синус и косинус получаем формулу:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta, \text{ для любых } \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Поскольку $\cos(\alpha + \beta) = \cos[\alpha - (-\beta)] = \cos \alpha \cos(-\beta) + \sin \alpha \sin(-\beta)$, учитывая четность или нечетность соответствующих тригонометрических функций, выводим:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta, \text{ для любых } \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \quad (5)$$



**Задания
с решением**

1. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos \frac{\pi}{2} \cos t + \sin \frac{\pi}{2} \sin t = \sin t$. Итак, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t$.

2. Заменяя в формуле примера 1 t на $\frac{\pi}{2} - t$, получим

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right) = \cos t.$$

Выведем формулу для $\sin(\alpha - \beta)$ при помощи формулы (5) и формул, выведенных в примерах 1 и 2: $\sin(\alpha - \beta) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha - \beta)\right] = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \beta\right] = \\ = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cos \beta - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin \beta = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$.

Таким образом, получили формулу:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta, \text{ для любых } \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

Заменяя в формуле (6) β на $-\beta$ и учитывая свойства соответствующих тригонометрических функций, можно вывести (докажите!) следующую формулу:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta, \text{ для любых } \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \quad (7)$$



**Задание
с решением**

Вычислим $\sin \frac{7\pi}{12}$.

Решение:

$$\sin \frac{7\pi}{12} = \sin \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \right) = \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2}).$$

Используя формулы (4)–(7), можно вывести формулы:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha + \beta) &= \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}, & \operatorname{tg}(\alpha - \beta) &= \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}, \\ \text{для любых } \alpha, \beta \in \mathbb{R}, & \text{ таких, что существуют соответ-} \\ & \text{ствующие тангенсы и } 1 \pm \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \neq 0. \end{aligned} \quad (8)$$



Задание

Пользуясь формулами (4)–(7), выведите формулы (8).

2.2. Формулы приведения

Известно, что любой угол β , измеренный в радианах, может быть записан в виде $\beta = \frac{\pi}{2}k + \alpha$, $k \in \mathbb{Z}$, $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$. Тогда на основании формул, доказанных в п. 2.1., можно свести вычисление значений тригонометрических функций произвольного угла β к вычислению значений этих функций угла α .

Примеры

- $\sin(\alpha + \pi) = \sin \alpha \cos \pi + \cos \alpha \sin \pi = -1 \cdot \sin \alpha = -\sin \alpha$.
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \frac{\pi}{2} \cos \alpha + \cos \frac{\pi}{2} \sin \alpha = \cos \alpha$;
 $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \frac{\pi}{2} \cos \alpha - \sin \frac{\pi}{2} \sin \alpha = -\sin \alpha$.
- $\operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{2} + \alpha\right) = \operatorname{tg}\left(3\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} = \frac{\cos \alpha}{-\sin \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha$.



Замечание

О Запомните!

Функция $\sin$ (функция tg) называется **кофункцией** для функции $\cos$ (соответственно для функции ctg), и наоборот.

Для облегчения вычисления значений тригонометрических функций можно применить следующее мнемоническое правило, названное **правилом приведения**:

- 1) абсолютное значение любой тригонометрической функции для угла $\beta = \frac{\pi}{2}k \pm \alpha$, $k \in \mathbb{Z}$, равно абсолютному значению этой же функции для угла α при четном k и равно абсолютному значению соответствующей кофункции для угла α при нечетном k ;
- 2) знак результата совпадает со знаком значения исходной функции, учитывая четверть, в которой находится угол $\frac{\pi}{2}k \pm \alpha$, и считая, что $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (вне зависимости от величины α).



**Задание
с решением**

Вычислите $\sin 1020^\circ$.

Решение:

$\sin 1020^\circ = \sin(90^\circ \cdot 11 + 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, так как $k = 11$ нечетное число и 1020° принадлежит IV четверти, в которой функция синус принимает отрицательные значения.

2.3. Формулы для тригонометрических функций двойного, тройного угла (аргумента)

Полагая в (5) и (7), что $\beta = \alpha$, получим формулы:

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha, \quad \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad (9)$$

которые называются **формулами косинуса и синуса двойного аргумента (угла)**.

Полагая в первой из формул (8), что $\beta = \alpha$ и $\operatorname{tg} \alpha, \operatorname{tg} 2\alpha$ определены при заданном α , получим следующую формулу для тангенса двойного аргумента (угла):

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{(2n+1)\pi}{2}, \quad \alpha \neq \frac{(2n+1)\pi}{4}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (10)$$

Для тригонометрических функций тройного аргумента выводятся формулы:

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha, \quad \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha. \quad (11)$$



Задание

Докажите формулы (10) и (11).

О Запомните!

Выведем две формулы, которые называются **формулами понижения показателя степени тригонометрических функций**:

$$\begin{array}{ccc} & \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha & \\ \swarrow & & \searrow \\ \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 & & \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \\ \downarrow & & \downarrow \\ \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} & & \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \end{array} \quad (12)$$

Применив формулы (12), можем понизить степени с четным показателем тригонометрических функций до первой степени.

Пример

$$\begin{aligned} \cos^2 \frac{\pi}{24} &= \frac{1 + \cos \frac{\pi}{12}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} (\sqrt{2} + \sqrt{6}). \end{aligned}$$

2.4*. Формулы преобразования суммы в произведение (дополнительный материал)

$$\begin{aligned} \text{Имеем } \sin \alpha + \sin \beta &= \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \\ &+ \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} + \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}. \end{aligned}$$

Следовательно, $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$, для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Аналогично получаем

$$\begin{aligned} \sin \alpha - \sin \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \cos \alpha - \cos \beta &= -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}, \end{aligned} \quad (13)$$

для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.



Задание

Выведите формулы (13).


**Задание
с решением**

Упростим выражение $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{4} - x\right)$.

Решение:

$$\begin{aligned}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{4} - x\right) &= \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} - x\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \\ &= \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 2\sin x \cos \frac{\pi}{4} = 2\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x = \sqrt{2}\sin x.\end{aligned}$$

Пользуясь формулами (13), докажем **монотонность** тригонометрических функций (см. §1).

Пусть, например, $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha_1 < \alpha_2 \leq \frac{\pi}{2}$. Для разности $A = \sin \alpha_2 - \sin \alpha_1$ имеем:
 $A = 2\sin \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} \cos \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$. Так как $\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, то
 $\sin \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} > 0$, $\cos \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} > 0$, $A > 0$.

Следовательно, $\sin \alpha_2 > \sin \alpha_1$, то есть функция синус на заданном промежутке строго возрастает.

Аналогично доказывается монотонность функций косинус, тангенс, котангенс (см. §1). (Докажите!)

2.5. Формулы универсальной тригонометрической подстановки

Имеем $\sin \alpha = 2\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$ (14) и $\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1$ (15).

Разделив правую часть равенства (14) на выражение $\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2}$, равное 1, получаем: $\sin \alpha = \frac{2\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2}}$ (16).

Разделив числитель и знаменатель правой части равенства (16) на $\cos^2 \frac{\alpha}{2}$, получаем:

$$\sin \alpha = \frac{2\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \neq (2n+1)\pi, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (17)$$

Аналогично, разделив правую часть равенства $\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ (18) на выражение $\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2}$, равное 1, получаем: $\cos \alpha = \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$ (19).

Разделив числитель и знаменатель правой части равенства (19) на $\cos^2 \frac{\alpha}{2}$, получаем:

$$\cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \neq (2n+1)\pi, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (20)$$

Из (17) и (20) следует (Докажите!):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \neq (2n+1)\pi, \quad \alpha \neq \frac{(2n+1)\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (21)$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \neq n\pi, \quad \alpha \neq (2n+1)\pi, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (22)$$

Формулы (17), (20), (21) и (22) называются **формулами универсальной тригонометрической подстановки**, позволяющие выразить $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$ через $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

Упражнения и задачи



Реальный профиль

А₁**Работайте в парах!** Вычислите:

1. а) $\cos(\alpha - \beta)$, $\cos(\alpha + \beta)$, $\sin(\alpha - \beta)$, $\sin(\alpha + \beta)$, $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, и $\sin \beta = \frac{3}{4}$, $\beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$;
 б) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$, $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$, $\operatorname{tg} 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\beta$, если $\cos \alpha = \frac{15}{17}$, $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, и $\cos \beta = \frac{1}{4}$, $\beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
2. Вычислите: а) $\sin 50^\circ \cos 40^\circ + \cos 50^\circ \sin 40^\circ$; б) $\cos \frac{4\pi}{15} \cos \frac{\pi}{10} + \sin \frac{4\pi}{15} \sin \frac{\pi}{10}$;
 в) $\sin 110^\circ \cos 70^\circ - \cos 110^\circ \sin(-70^\circ)$; г) $\cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{\pi}{10} - \sin \frac{\pi}{7} \sin \frac{\pi}{10}$.
3. **Исследуйте!** Установите, существует ли такой угол α , при котором:
 а) $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\cos \alpha = \frac{4}{5}$; б) $\sin \alpha = \frac{40}{41}$, $\cos \alpha = \frac{8}{41}$; в) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{5}$, $\operatorname{ctg} \alpha = 1,25$; г) $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{5} - 2$, $\operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{5} + 2$.

В₁

4. (ЕАК 2012) Вычислите значение выражения:
 $\frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\sin x} + \frac{\sqrt{1 - \sin^2 x}}{\cos x}$, если $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.
5. (ЕАК 2022) Дано выражение $E(x) = (\cos x + 1)^2 + (\cos x - 1)^2$.
 Покажите, что значение выражения $2\sqrt{3} \cdot E(15^\circ)$ является натуральным числом.
6. (ЕАК 2016) Вычислите значение выражения:
 $E(\alpha) = \frac{4}{5} \operatorname{tg} \alpha + \frac{5}{12} \sin(2\alpha)$,
 если $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ и $\alpha \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$.
7. **Работайте в парах!** Упростите выражение:
 а) $\cos^2 \alpha + 2 \sin^2 \alpha - 1$; б) $2 \sin \alpha \cos \alpha \operatorname{ctg} 2\alpha$;
 в) $\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha + \operatorname{ctg}^2 2\alpha$; г) $\operatorname{tg}^2 \alpha (\sin^2 \alpha - 1)$;
 д) $\frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} + \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$; е) $\frac{\cos 2\alpha + \sin 2\alpha + 1}{\cos \alpha}$.
8. Используя формулы понижения показателя степени, упростите выражение:
 а) $\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha$; б) $\sin^2 \alpha - \cos 2\alpha$; в) $\cos^2 \alpha + \cos 2\alpha$.
9. Найдите $\sin \alpha \cos \alpha$, если $\sin \alpha + \cos \alpha = 0,6$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
10. Найдите $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = 2,5$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi n}{2} \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$.
11. Найдите $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$, если:
 а) $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 1,5$; б) $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = -0,5$.
12. Найдите $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$ и $\operatorname{ctg} 2\alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{7}$.
13. Докажите тождество:
 а) $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$;
 б) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$.
14. Докажите, что: а) $\sin^3 \alpha (1 + \operatorname{ctg} \alpha) - \sin \alpha = \cos \alpha - \cos^3 \alpha (1 + \operatorname{tg} \alpha)$, если $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi n}{2} \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$;
 б) $\sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} - \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \frac{2}{\operatorname{tg} \alpha}$, если $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$;
 в) $\frac{\sin \alpha + 2 \sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\cos \alpha + 2 \cos 2\alpha + \cos 3\alpha} = \frac{1}{\operatorname{ctg} 2\alpha}$, если $\alpha \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

С₁

15. Покажите, что если в $\triangle ABC$:
 а) $\cos B + \cos C = \sin B + \sin C$, то треугольник прямоугольный;
 б) $\sin B + \cos B = \sin C + \cos C$, то треугольник прямоугольный или равнобедренный;
 в) $\sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} = \sin \frac{B}{2} \cos \frac{A}{2}$, то треугольник равнобедренный;
 г) $\cos A + \cos B - \cos(A + B) = \frac{3}{2}$, то треугольник равносторонний.
16. Найдите высоту прямоугольной трапеции, описанной окружностью, если величина острого угла трапеции равна α , а ее периметр $\mathcal{P}$.
17. **Исследуйте!** Используя Интернет, приведите примеры применения элементов тригонометрии в различных областях.

§3 Тригонометрические уравнения

3.1. Обратные тригонометрические функции

Рассмотрим тригонометрические функции только на промежутках, где они обратимы, т. е. некоторые их сужения, а именно рассмотрим функции:

$$f_1: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1], f_1(x) = \sin x; \quad f_2: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1], f_2(x) = \cos x;$$

$$f_3: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}, f_3(x) = \operatorname{tg} x; \quad f_4: (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}, f_4(x) = \operatorname{ctg} x.$$

Эти функции являются обратимыми. Обратные им функции обозначаются $\arcsin$, $\arccos$, arctg , arcctg и соответственно читаются: „арксинус“, „арккосинус“, „арктангенс“, „арккотангенс“.

Итак, на основании определения обратных функций получаем:

$$\arcsin x = y \Leftrightarrow \sin y = x, \quad x \in [-1, 1], \quad y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]; \quad (1)$$

$$\arccos x = y \Leftrightarrow \cos y = x, \quad x \in [-1, 1], \quad y \in [0, \pi]; \quad (2)$$

$$\operatorname{arctg} x = y \Leftrightarrow \operatorname{tg} y = x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right); \quad (3)$$

$$\operatorname{arcctg} x = y \Leftrightarrow \operatorname{ctg} y = x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in (0, \pi). \quad (4)$$

Определение

Функции $\arcsin: [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $g_1(x) = \arcsin x$;

$\arccos: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$, $g_2(x) = \arccos x$;

$\operatorname{arctg}: \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $g_3(x) = \operatorname{arctg} x$;

$\operatorname{arcctg}: \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$, $g_4(x) = \operatorname{arcctg} x$,

называются **обратными тригонометрическими функциями**.

Примеры

1. $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, так как $\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ и $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$;

2. $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$, поскольку $\frac{2\pi}{3} \in [0, \pi]$ и $\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$.

Чтобы найти значения обратных тригонометрических функций, можем воспользоваться таблицей значений тригонометрических функций синус, косинус, тангенс, котангенс (таб. 1) на соответствующих промежутках, поменяв в ней местами значения аргументов и значения функций (таб. 2, 3):

Таблица 2

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin x$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\arccos x$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

Таблица 3

x	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{arctg} x$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\operatorname{arcctg} x$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

Можно доказать, что:

$$\begin{aligned} \arcsin(-x) &= -\arcsin x, \quad x \in \mathbb{R}; & \operatorname{arctg}(-x) &= -\operatorname{arctg} x, \quad x \in \mathbb{R}; \\ \arccos(-x) &= \pi - \arccos x, \quad x \in \mathbb{R}; & \operatorname{arctg}(-x) &= \pi - \operatorname{arctg} x, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Из определений обратных тригонометрических функций и соотношений (1)–(4) вытекают *соотношения (тождества)* (5)–(9):

$$\sin(\arcsin x) = x, \quad x \in [-1, 1]; \quad \arcsin(\sin x) = x, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]. \quad (5)$$

$$\cos(\arccos x) = x, \quad x \in [-1, 1]; \quad \arccos(\cos x) = x, \quad x \in [0, \pi]. \quad (6)$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x, \quad x \in \mathbb{R}; \quad \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right). \quad (7)$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = x, \quad x \in \mathbb{R}; \quad \operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} x) = x, \quad x \in (0, \pi). \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} \sin(\arccos x) &= \sqrt{1-x^2}, \quad x \in [-1, 1]; \\ \cos(\arcsin x) &= \sqrt{1-x^2}, \quad x \in [-1, 1]; \\ \arcsin x + \arccos x &= \frac{\pi}{2}, \quad x \in [-1, 1]. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$



Найдем области определения функций $f, h: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \arccos(2x-1)$, $h(x) = \operatorname{arctg} \frac{x-3}{2x-2}$.

Решение:

В силу определения функции арккосинус имеем $-1 \leq 2x-1 \leq 1$, откуда $0 \leq x \leq 1$. Следовательно, $D(f) = [0, 1]$. Аргумент функции арктангенс может принимать любое действительное значение, поэтому достаточно, чтобы знаменатель отношения $\frac{x-3}{2x-2}$ не превращался в нуль. Таким образом, $D(h) = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.



Постройте графики обратных тригонометрических функций, зная, что они симметричны графикам соответствующих тригонометрических функций ((1), (2), (3), (4)), относительно биссектрисы I и III четвертей. (Указание. См. с. 193.)

3.2. Тригонометрические уравнения

Задача

Площадь боковой поверхности правильной треугольной пирамиды в 2 раза больше площади ее основания. Найдем величину угла CDB в равнобедренном треугольнике CDB (рис. 8.16).

Решение:

Пусть $AB = a$, $m(\angle CDE) = \alpha$, где $DE \perp BC$.

Имеем $\mathcal{A}_b = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$ и $\mathcal{A}_l = \mathcal{P}_b \cdot DE$. Так как $CE = \frac{a}{2}$, из треугольника CED

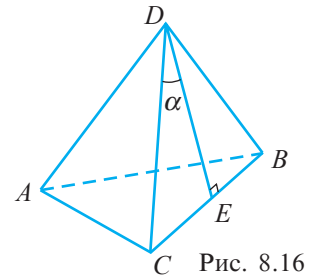
($m(\angle E) = 90^\circ$) получим: $\frac{DE}{CE} = \operatorname{ctg} \alpha$, $DE = CE \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \frac{a}{2} \cdot \operatorname{ctg} \alpha$.

Так как $\mathcal{A}_l = 2\mathcal{A}_b$, получаем $3a \cdot \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \alpha = 2 \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Таким образом, решение задачи свелось к решению уравнения $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, которое является *тригонометрическим уравнением*.

Решив это уравнение (далее изучим метод решения таких уравнений) и учитывая, что $\angle CDE$ – острый, получим $m(\angle CDE) = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$.

Итак, $m(\angle CDB) = 2 \cdot m(\angle CDE) = 120^\circ$. Ответ: 120° .



**определение**

Уравнения, содержащие неизвестное под знаком тригонометрических функций, называются **тригонометрическими уравнениями**.

**1 Простейшие тригонометрические уравнения****определение**

Тригонометрические уравнения вида $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$, где $a \in \mathbb{R}$, называются **простейшими тригонометрическими уравнениями**.

Найдем общие формулы решений простейших тригонометрических уравнений. Решения этих уравнений можно проиллюстрировать двумя способами:

- 1) пользуясь тригонометрической окружностью;
- 2) используя графики тригонометрических функций.

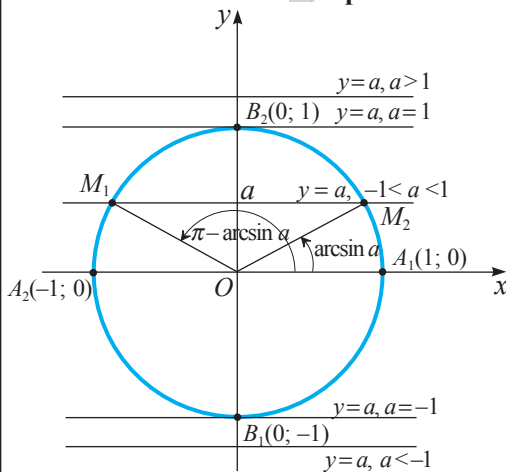
1 Уравнение $\sin x = a$ 

Рис. 8.17

ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$. Проиллюстрируем решение этого уравнения при помощи тригонометрической окружности. Построим тригонометрическую окружность и прямую $y = a$ (рис. 8.17). Решениями уравнения $\sin x = a$ являются величины углов (в радианах или градусах), образованных положительной полуосью Ox и полупрямыми $[OM_1, [OM_2)$, соответствующими точкам окружности с ординатой a . Значит, при $|a| > 1$, уравнение $\sin x = a$ не имеет решений.

Если $a = 1$, то единственная точка с ординатой 1 (точка пересечения окружности с прямой $y = 1$) – это $B_2(0; 1)$. Следовательно, частным решением уравнения $\sin x = 1$ является значение $x_0 = \frac{\pi}{2}$. На основании периодичности функции синус получаем все решения уравнения $\sin x = 1$:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}. \quad (10)$$

Аналогично для $a = -1$ (точка $B_1(0; -1)$) получаем все решения уравнения $\sin x = -1$:

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}. \quad (11)$$

Если $a = 0$, то на окружности существуют точки $A_1(1; 0)$ и $A_2(-1; 0)$ с ординатой 0. Значит, **частными решениями** уравнения $\sin x = 0$ являются значения $x_1 = 0$ и $x_2 = \pi$.

Учитывая периодичность функции синус, получаем все решения уравнения $\sin x = 0$ в виде: $x = 0 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$, $x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$, или их объединение:

$$x = \pi n, n \in \mathbb{Z}. \quad (12)$$

Если $a \in (-1, 0) \cup (0, 1)$, то прямая $y = a$ пересекает тригонометрическую окружность в двух точках, M_1 и M_2 , с ординатой a (рис. 8.17). Эти точки симметричны относительно оси ординат. Следовательно, частными решениями уравнения $\sin x = a$ являются значения $x_1 = \arcsin a$, $x_2 = \pi - \arcsin a$. Учитывая периодичность функции синус, получаем все решения уравнения $\sin x = a$ для $a \in (-1, 0) \cup (0, 1)$:

$$\begin{cases} x = \arcsin a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ x = \pi - \arcsin a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Эти формулы можно объединить:

$$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in \mathbb{Z}. \quad (13)$$

Для $a = 1$, $a = -1$, $a = 0$ из (13) получаем частные решения (10)–(12). Таким образом, (13) является общей формулой решений простейшего тригонометрического уравнения $\sin x = a$, $a \in [-1, 1]$.

Итак, множеством решений уравнения $\sin x = a$, $a \in [-1, 1]$, является:

$$S = \{(-1)^k \arcsin a + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$



**Задание
с решением**

Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение:

По формуле (13) получим: $x = (-1)^k \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, или $x = (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $S = \{(-1)^k \cdot \frac{\pi}{3} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

О Запомните!

Уравнение $\sin x = a$, где $a \in [-1, 1]$, имеет на множестве $\mathbb{R}$ бесконечное множество решений, которые можно геометрически изобразить как абсциссы точек пересечения графиков функций $f(x) = \sin x$ и $g(x) = a$ (рис. 8.18).

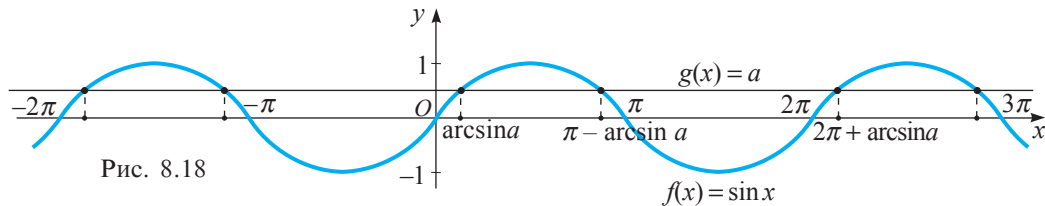


Рис. 8.18

Внимание! При решении тригонометрических уравнений (неравенств) необходимо учесть, что $\arcsin a \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ и $\arcsin(-a) = -\arcsin a$.

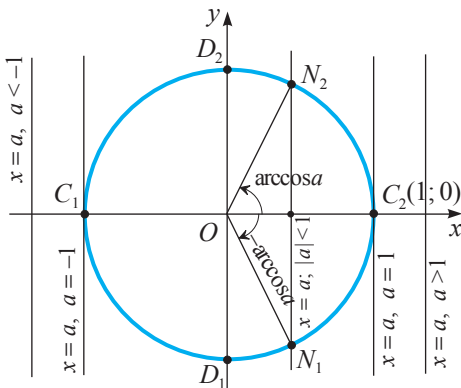


Рис. 8.19

2 Уравнение $\cos x = a$

ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$. Даны тригонометрическая окружность и прямая $x = a$ (рис. 8.19).

Решениями уравнения $\cos x = a$ являются величины углов, образованных положительной полуосью $[Ox]$ и полупрямыми $[ON_1]$, $[ON_2]$, соответствующими точкам тригонометрической окружности с абсциссой a . При $|a| > 1$ уравнение $\cos x = a$ не имеет решений.

Пользуясь рисунком 8.19 и учитывая периодичность функции косинус, получим общую формулу решений простейшего тригонометрического уравнения $\cos x = a$, $a \in [-1, 1]$:

$$x = \pm \arccos a + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Следовательно, множеством решений уравнения $\cos x = a$, $a \in [-1, 1]$, является:

$$S = \{\pm \arccos a + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}. \quad (14)$$



Задание

Докажите формулу (14).

Внимание! При решении тригонометрических уравнений (неравенств) необходимо учесть, что $\arccos a \in [0, \pi]$ и $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$.



**Задание
с решением**

Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $\cos x = -\frac{1}{2}$.

Решение:

Согласно формуле (14) получаем решения:

$$x = \pm \arccos \left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \pm \left(\pi - \arccos \frac{1}{2}\right) + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{откуда } x = \pm \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \text{ То есть, } x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } S = \left\{\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

О Запомните!

Уравнение $\cos x = a$, где $a \in [-1, 1]$, имеет на множестве $\mathbb{R}$ бесконечное множество решений, которые можно геометрически изобразить как абсциссы точек пересечения графиков функций $f(x) = \cos x$ и $g(x) = a$ (рис. 8.20).

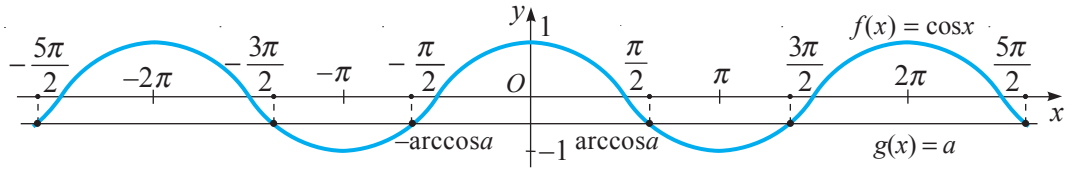


Рис. 8.20

3 Уравнение $\operatorname{tg} x = a$

$$\text{ОДЗ: } x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Так как $E(\operatorname{tg}) = \mathbb{R}$, то уравнение $\operatorname{tg} x = a$ имеет решения для любого $a \in \mathbb{R}$.

Решим уравнение $\operatorname{tg} x = a$, используя тригонометрическую окружность и ось тангенсов A_1T (рис. 8.21). Для любого числа a на оси тангенсов есть только одна точка $T(1, a)$ с ординатой a . Прямая OT пересекает тригонометрическую окружность в двух точках (P и P_1). Значит, существуют два угла α и $\pi + \alpha$, тангенс которых равен a , где $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ и $\alpha = \operatorname{arctg} a$.

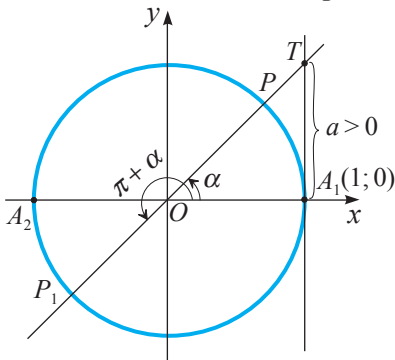


Рис. 8.21

Тогда **частным решением** уравнения $\operatorname{tg} x = a$ является значение $x_1 = \operatorname{arctg} a$. Аналогично решениям уравнений $\sin x = a$, $\cos x = a$, пользуясь рисунком 8.21 и учитывая периодичность функции тангенс, получаем общую формулу решений простейшего тригонометрического уравнения $\operatorname{tg} x = a$, $a \in \mathbb{R}$:

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Для $a = 0$ получим формулу для вычисления всех решений уравнения $\operatorname{tg} x = 0$:

$$x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Итак, множеством решений уравнения $\operatorname{tg} x = a$, $a \in \mathbb{R}$, является:

$$S = \{\operatorname{arctg} a + \pi n \mid n \in \mathbb{Z}\}. \quad (15)$$



Задание с решением

Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$.

Решение:

По формуле (15), $x = \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \pi n$, $n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = -\operatorname{arctg} \sqrt{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, откуда $x = -\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Ответ: } S = \left\{ -\frac{\pi}{3} + \pi n \mid n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

О Запомните!

Уравнение $\operatorname{tg} x = a$, $a \in \mathbb{R}$, имеет на множестве $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ бесконечное множество решений, которые можно геометрически изобразить как абсциссы точек пересечения графиков функций $f(x) = \operatorname{tg} x$ и $g(x) = a$ (рис. 8.22).

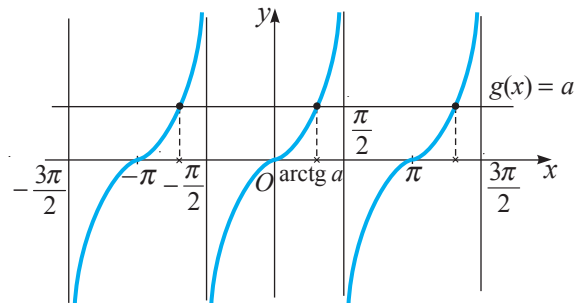


Рис. 8.22

Внимание! При решении тригонометрических уравнений (неравенств) необходимо учесть, что $\operatorname{arctg} a \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ и $\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$.

4 Уравнение $\operatorname{ctg} x = a$

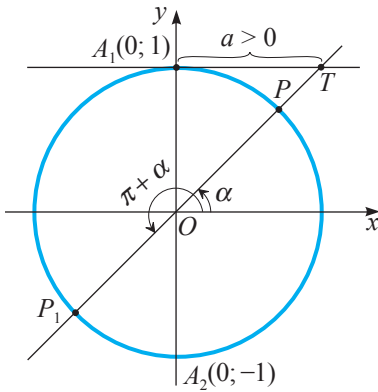


Рис. 8.23

ОДЗ: $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Так как $E(\operatorname{ctg}) = \mathbb{R}$, то уравнение $\operatorname{ctg} x = a$ имеет решения для любого $a \in \mathbb{R}$.

Решим уравнение $\operatorname{ctg} x = a$, используя тригонометрическую окружность и ось котангенсов A_1T (рис. 8.23).

Аналогично уравнению $\operatorname{tg} x = a$, для простейшего тригонометрического уравнения $\operatorname{ctg} x = a$, $a \in \mathbb{R}$, получаем общую формулу его решений:

$$x = \operatorname{arccotg} a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Для $a = 0$ получим формулу для вычисления всех решений уравнения $\operatorname{ctg} x = 0$:

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Итак, множеством решений уравнения $\operatorname{ctg} x = a$, $a \in \mathbb{R}$, является:

$$S = \{\operatorname{arccotg} a + \pi n \mid n \in \mathbb{Z}\}. \quad (16)$$



Задание

Выведите формулу (16).

Запомните!

Уравнение $\operatorname{ctg} x = a$, $a \in \mathbb{R}$, имеет на множестве $\mathbb{R} \setminus \{\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ бесконечное множество решений, которые можно геометрически изобразить как абсциссы точек пересечения графиков функций $f(x) = \operatorname{ctg} x$ с прямой $g(x) = a$.

Внимание! При решении тригонометрических уравнений (неравенств) необходимо учесть, что $\operatorname{arccotg} a \in (0, \pi)$ и $\operatorname{arccotg}(-a) = \pi - \operatorname{arccotg} a$.



Задание с решением

Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$.

Решение:

Согласно формуле (16), $x = \operatorname{arccotg}(-\sqrt{3}) + \pi n$, $n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \pi - \operatorname{arccotg} \sqrt{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Значит, $x = \frac{5\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $S = \left\{ \frac{5\pi}{6} + \pi n \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$.



Тригонометрические уравнения вида $f(\sin x) = 0$, $f(\cos x) = 0$, $f(\operatorname{tg} x) = 0$, $f(\operatorname{ctg} x) = 0$

Уравнения, содержащие неизвестное под знаком только одной тригонометрической функции, решаются **методом введения вспомогательного неизвестного**, приводящим исходное уравнение к такому уравнению, которое не содержит тригонометрических функций.



Задание с решением

Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $\cos^2 x + 2 \sin x + 2 = 0$.

Решение:

ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$. Так как $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, то $\sin^2 x - 2 \sin x - 3 = 0$.

Пусть $\sin x = t$, где $|t| \leq 1$. Последнее уравнение сводится к алгебраическому уравнению II степени $t^2 - 2t - 3 = 0$, имеющему решения $t_1 = -1$, $t_2 = 3$. Значение $t_2 = 3$ не удовлетворяет условию $|t| \leq 1$. Решениями уравнения $\sin x = -1$ являются значения $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $S = \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.



Однородные тригонометрические уравнения



определение

Тригонометрические уравнения вида

$$a_n \sin^n x + a_{n-1} \sin^{n-1} x \cos x + \dots + a_1 \sin x \cos^{n-1} x + a_0 \cos^n x = 0 \quad (17)$$

называются **однородными тригонометрическими уравнениями n -ой степени, $n \in \mathbb{N}^*$, относительно $\sin x$ и $\cos x$.**

Уравнения вида (17) решаются делением обеих частей уравнения на $\cos^n x$ при $a_n \neq 0$ (на $\sin^n x$ при $a_0 \neq 0$), если $\cos x$ (соответственно $\sin x$) не является общим множителем.

Получаем равносильное уравнение $a_n \operatorname{tg}^n x + a_{n-1} \operatorname{tg}^{n-1} x + \dots + a_1 \operatorname{tg} x + a_0 = 0$, которое заменой $\operatorname{tg} x = t$ сводится к алгебраическому уравнению $a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0 = 0$.

Действительно, если $a_n \neq 0$ ($a_0 \neq 0$), то не существует угла φ , для которого $\cos \varphi = 0$ ($\sin \varphi = 0$), потому что если бы такой угол существовал, то, заменив в первоначальном уравнении x на φ , получили бы: $a_n \sin^n \varphi = 0$ ($a_0 \cos^n \varphi = 0$) или $\sin \varphi = 0$ ($\cos \varphi = 0$). Однако не существует угла, для которого функции синус и косинус принимали бы одновременно значение 0. Значит, деление обеих частей однородного уравнения (17) на $\cos^n x$ (соответственно на $\sin^n x$) приводит к равносильному уравнению.



Задание с решением

Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $\cos^2 x - \sin x \cos x + 4 \sin^2 x = 2$.

Решение:

ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$. Подставив в заданное уравнение $2 = 2 \cdot 1 = 2(\cos^2 x + \sin^2 x)$, получим однородное уравнение: $\cos^2 x + \sin x \cos x - 2 \sin^2 x = 0$. Деление его обеих частей на $\cos^2 x$ приводит к равносильному уравнению $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 2 = 0$.

Пусть $\operatorname{tg} x = t$. Тогда получаем алгебраическое уравнение $t^2 + t - 2 = 0$, имеющее решения $t_1 = -2$, $t_2 = 1$. Вернувшись к неизвестному x , получаем совокупность тригонометрических уравнений $\operatorname{tg} x = -2$; $\operatorname{tg} x = 1$, множествами решений которых являются соответственно множества: $S_1 = \{-\operatorname{arctg} 2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ и $S_2 = \left\{\frac{\pi}{4} + n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$.

Ответ: $S = \{-\operatorname{arctg} 2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\frac{\pi}{4} + n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$.

Внимание! Если при решении тригонометрических уравнений возможно применение метода разложения на множители (особенно при решении однородных тригонометрических уравнений), то сначала применяем этот метод, а затем – другие методы решения полученных уравнений. В противном случае можем потерять решения на первом же этапе решения.



Задание с решением

Решим на множестве $\mathbb{R}$ однородное уравнение $\cos^2 x - 3 \sin x \cos x = 0$.

Решение:

$\cos x$ является общим множителем левой части.

Решая уравнение методом разложения на множители, получаем уравнение: $\cos x (\cos x - 3 \sin x) = 0$, равносильное совокупности
$$\begin{cases} \cos x = 0, \\ \cos x - 3 \sin x = 0. \end{cases}$$

Множествами решений этих уравнений являются соответственно множества:

$$S_1 = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}, \quad S_2 = \left\{\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Ответ: $S = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$.



замечание

Если бы мы поделили обе части первоначального уравнения на $\cos^2 x$, то потеряли бы решения вида $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (решения уравнения $\cos x = 0$).

4 Тригонометрические уравнения вида $a \sin x + b \cos x = c$, $a, b \in \mathbb{R}^*$

Рассмотрим несколько методов решения уравнений этого вида.

1 Метод сведения к однородному уравнению

Так как $\sin x = \sin\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right) = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$, а $\cos x = \cos\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right) = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$ и $1 = \sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}$, то в общем случае уравнение $a \sin x + b \cos x = c$ сводится к однородному уравнению вида:

$$(b - c) \cos^2 \frac{x}{2} + 2a \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - (b + c) \sin^2 \frac{x}{2} = 0. \quad (18)$$

О Запомните!

Уравнение вида $a \sin x + b \cos x = c$ имеет решения, если и только если $a^2 + b^2 \geq c^2$ (так как уравнение II степени имеет решения тогда и только тогда, когда $\Delta \geq 0$). При $b = -c$ уравнение сводится к простейшему тригонометрическому уравнению вида $\operatorname{tg} t = a$, а при $b = c$ применяется метод разложения на множители. При $c = 0$ получаем однородное тригонометрическое уравнение I степени.



Задание с решением

Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $2 \sin x + 3 \cos x = 1$.

Решение:

ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$. Приводим исходное уравнение (оно имеет решение, так как $2^2 + 3^2 > 1^2$) к однородному: $4 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + 3 \cos^2 \frac{x}{2} - 3 \sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 \sin^2 \frac{x}{2} - 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - \cos^2 x = 0$. Разделив обе части последнего уравнения на $\cos^2 \frac{x}{2} \neq 0$, получим равносильное уравнение: $2 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 = 0$. После подстановки $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ получаем алгебраическое уравнение: $2t^2 - 2t - 1 = 0$, имеющее решения $t_1 = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$, $t_2 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$. Вернувшись к неизвестному x , получаем совокупность

уравнений: $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$; $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$, решениями которой являются множества:

$$S_1 = \left\{ 2 \arctg \frac{1 - \sqrt{3}}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}, \quad S_2 = \left\{ 2 \arctg \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + 2n\pi \mid n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$\text{Ответ: } S = \left\{ 2 \arctg \frac{1 - \sqrt{3}}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ 2 \arctg \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + 2n\pi \mid n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

2 Метод введения вспомогательного угла

Разделив обе части уравнения $a \sin x + b \cos x = c$ (19) на a , $a \in \mathbb{R}^*$, получим равносильное уравнение $\sin x + \frac{b}{a} \cos x = \frac{c}{a}$ (20).

Пусть $\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \alpha$, где $\alpha = \arctg \frac{b}{a} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Угол α называется **вспомогательным углом**. Подставив $\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \alpha$ в уравнение (20), получим:

$$\begin{aligned} \sin x + \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos x &= \frac{c}{a} \Leftrightarrow \sin x + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cos x = \frac{c}{a} \Leftrightarrow \frac{\sin x \cos \alpha + \sin \alpha \cos x}{\cos \alpha} = \frac{c}{a} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\sin(x + \alpha)}{\cos \alpha} &= \frac{c}{a} \Leftrightarrow \sin(x + \alpha) = \frac{c}{a} \cos \alpha. \end{aligned}$$

Решения последнего уравнения являются решениями уравнения (19).


**Задание
с решением**

Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $\sqrt{3} \sin x + \cos x = \sqrt{3}$.

Решение:

ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$. Разделив обе части уравнения на $\sqrt{3}$, получим уравнение:

$$\sin x + \frac{1}{\sqrt{3}} \cos x = 1. \quad (*)$$

Имеем $\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Значит, $\alpha = \frac{\pi}{6} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Подставив $\frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}$ в уравнение (*),

$$\text{получим: } \sin x + \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{\cos \frac{\pi}{6}} \cdot \cos x = 1 \Leftrightarrow \sin x \cdot \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{6} \cdot \cos x = \cos \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Следовательно, $x = (-1)^k \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Ответ: } S = \left\{ (-1)^k \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

В некоторых случаях вводится *вспомогательный угол*, учитывая, что уравнение $a \sin x + b \cos x = c$ равносильно уравнению $\sin(x + \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, где φ определя-

$$\text{ется, решив систему: } \begin{cases} \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \\ \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{cases}$$

В случае уравнения $\sqrt{3} \sin x + \cos x = \sqrt{3}$ имеем: $a = \sqrt{3}, b = 1$, значит $\sqrt{a^2 + b^2} = 2$.

Разделив обе части уравнения на 2, получим: $\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ или $\cos \frac{\pi}{6} \sin x + \sin \frac{\pi}{6} \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Значит, $\varphi = \frac{\pi}{6}$ и $\sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $x = (-1)^k \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Ответ: } S = \left\{ (-1)^k \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

3 Метод сведения к системе алгебраических уравнений

Дано уравнение $a \sin x + b \cos x = c$, $a, b \in \mathbb{R}^*$. Учитывая, что $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ для любого $x \in \mathbb{R}$, и полагая, что $\sin x = u$, $\cos x = v$, сводим заданное уравнение к системе алгебраических уравнений: $\begin{cases} u^2 + v^2 = 1, \\ au + bv = c. \end{cases}$ Решив эту систему и вернувшись к произведенным подстановкам, получим решения исходного уравнения.


**Задание
с решением**

Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $\sin 3x + \cos 3x = 1$.

Решение:

Пусть $\sin 3x = u$, $\cos 3x = v$. Зная, что $\sin^2 3x + \cos^2 3x = 1$, уравнение сводится к системе алгебраических уравнений: $\begin{cases} u^2 + v^2 = 1, \\ u + v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-v)^2 + v^2 = 1, \\ u = 1-v \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2v + v^2 + v^2 = 1, \\ u = 1-v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2v(1-v) = 0, \\ u = 1-v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 0, \\ u = 1-v; \\ 1-v = 0, \\ u = 1-v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 0, \\ u = 1; \\ v = 1, \\ u = 0. \end{cases}$$

Возвращаясь к сделанным заменам, получаем:

$$а) \begin{cases} \sin 3x = 1, \\ \cos 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ 3x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}k, k \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} \sin 3x = 0, \\ \cos 3x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ 3x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } S = \left\{ \frac{2\pi n}{3} \mid n \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$



Решение тригонометрических уравнений с отбором решений

Иногда требуется не только решить соответствующее тригонометрическое уравнение, но и отобрать те решения, которые удовлетворяют некоторым заданным изначально условиям: принадлежат заданному числовому промежутку, являются решениями других уравнений или неравенств и т. д. Рассмотрим процедуру отбора решений на конкретном примере.



Задание с решением

Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $5(\sin x + \cos x) - 4\sin x \cos x = 5$ и найдем его решения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi, \frac{\pi}{2}\right]$.

Решение:

ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$. Вводим новое неизвестное $\sin x + \cos x = t$.

Тогда $\sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$ (Обоснуйте!) и исходное уравнение сводится к квадратному уравнению $2t^2 - 5t + 3 = 0$, имеющему решения $t_1 = 1$, $t_2 = 1,5$ (Проверьте!). Вернувшись к неизвестному x , получим совокупность уравнений: $\sin x + \cos x = 1$; $\sin x + \cos x = 1,5$. Второе уравнение не имеет решений на множестве $\mathbb{R}$. (Проверьте!)

Решаем первое уравнение методом введения вспомогательного угла и получаем уравнение: $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, имеющее решения:

$$x = (-1)^k \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}, \text{ или } x = [(-1)^k - 1] \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Для отбора решений, принадлежащих отрезку $\left[-\pi, \frac{\pi}{2}\right]$, рассмотрим два случая:

1) Пусть $k = 2n$, $n \in \mathbb{Z}$. Тогда $x = [(-1)^{2n} - 1] \frac{\pi}{4} + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, или $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Так как $x \in \left[-\pi, \frac{\pi}{2}\right]$, то $-\pi \leq 2\pi n \leq \frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Значит, $-\frac{1}{2} \leq n \leq \frac{1}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$. Делаем вывод, что $n = 0$. Тогда, $x = 2\pi \cdot 0$ или $x = 0$.

То есть только одно решение принадлежит отрезку $\left[-\pi, \frac{\pi}{2}\right]$.

2) Пусть $k = 2n + 1$, $n \in \mathbb{Z}$. Тогда, $x = [(-1)^{2n+1} - 1] \frac{\pi}{4} + (2n + 1)\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, или $x = -\frac{\pi}{2} + \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. То есть, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Так как $x \in \left[-\pi, \frac{\pi}{2}\right]$, то $-\pi \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq \frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$, или $-1 \leq \frac{1}{2} + 2n \leq \frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Значит, $-\frac{3}{4} \leq n \leq 0, n \in \mathbb{Z}$. Делаем вывод, что $n = 0$. Тогда, $x = \frac{\pi}{2} + 2 \cdot 0 \cdot \pi$ или $x = \frac{\pi}{2}$. Значит, только одно решение принадлежит отрезку $\left[-\pi, \frac{\pi}{2}\right]$.

Объединение полученных в обоих случаях решений, образует множество решений исходного уравнения, принадлежащих указанному отрезку.

Ответ: $S = \left\{0, -\frac{\pi}{2}\right\}$.

Замечание

Этим примером мы показали, как можно применить **метод введения вспомогательного неизвестного** при решении уравнений вида $f(\sin x \pm \cos x, \sin x \cos x) = 0$.

Как тригонометрические функции, так и тригонометрические уравнения применяются в различных областях. Например:

- Преобразование вращения описывается соотношением, в котором фигурируют тригонометрические функции.
- В медицине уравнение функционирования сердца описывается сложным тригонометрическим уравнением.
- Ученые-биологи утверждают, что путь, пройденный рыбой в воде, имеет синусоидальную (или косинусоидальную) траекторию, а при плавании их тело принимает форму графика тангенса (или котангенса).
- В географии для расчета расстояния между различными точками (доступными или недоступными) используется теорема косинусов.
- В архитектуре для расчета высоты используется угол возвышения, который определяется из соотношений, содержащих тригонометрические функции.
- В декоративно-прикладном искусстве встречаются различные кривые, имеющие тригонометрическое описание.
- В физике маятник совершает периодические колебания, имеющие тригонометрическое описание и т. д.

Упражнения и задачи



Реальный профиль

A₁

Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение (1–3):

- а) $\sin 2x = \sqrt{2}$; б) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$; г) $\sin\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.
- а) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$; б) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\cos 5x = \frac{\sqrt{5}}{2}$; г) $\cos\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = \frac{1}{2}$.
- а) $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; б) $\operatorname{tg} 2x = 25$; в) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = 1$; г) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{5}\right) = \sqrt{3}$.

B₁

Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение (4–8):

- а) $\cos^2 \frac{5x}{2} = \frac{1}{4}$; б) $\sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$; в) $\operatorname{tg}^2\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = 3$;
г) $1 - \cos^2(3x - 2) = \cos \frac{\pi}{3}$; д) $\sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin 6x$; е) $\sqrt{2}(\sin x + \cos x) = 2 \cos 3x$.
- а) $2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0$; б) $\cos^2 x - 5 \cos x + 6 = 0$; в) $\operatorname{tg}^2 x - 7 \operatorname{tg} x + 12 = 0$; г) $2 \cos^2 5x + \sin 5x + 1 = 0$.
- а) $\sin \frac{x}{3} + \cos \frac{x}{3} = 0$; б) $4 \sin x - 3 \cos x = 0$; в) $\sin^2 x - 3 \cos^2 x = \sin 2x$; г) $4 \sin^2 x + \sin 2x = 3$.
- а) $\cos x + \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$; б) $\sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x = \sqrt{2}$; в) $5 \sin x + \cos x = 5$; г) $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \sin 3x$.

8. **Работайте в парах!**

- а) $\cos 2x = \sin x - \cos x$; б) $\sin 2x = 1 - \sqrt{2}(\cos x - \sin x)$; в) $2\sin^2 x + 5\sin x \cos x + 5\cos^2 x = 1$;
 г) $\sin^4 2x - \cos^4 2x = 1$; д) $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$; е*) $\sin x \sin 3x \cos 5x = 1$;
 ж) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \sqrt{2}(\sin x + \cos x)$; з) $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$;
 и) $\sin \frac{x}{3} - \cos \frac{x}{3} = \sqrt{2} \sin \frac{5x}{2}$; к) $\frac{1 - \operatorname{tg} 2x}{1 + \operatorname{tg} 2x} = 1 - \sin 4x$.

9. **Исследуйте!** Найдите действительные решения тригонометрического уравнения, принадлежащие указанному промежутку:

- а) $1 - \sin 2x + \sin x - \cos x = 0$, $-\frac{3\pi}{4} \leq x \leq \pi$; б) $2\sin 5x \sin \frac{3}{2}x = \cos \frac{x}{2}$, $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$;
 в) $\sin^2 x - 3\sin x + 2 = 0$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$; г) $2\cos^2 x - 7\cos x + 2 = 0$, $x \in (0, \pi)$.

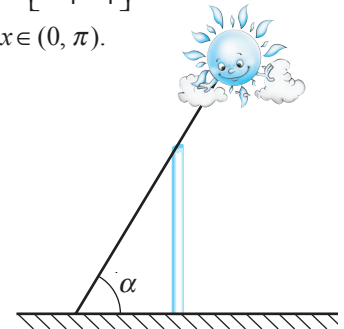
10. Вертикальный столб высотой 7 м оставляет тень длиной 4 м. Определите (в градусах) высоту солнца над линией горизонта.

11. Стороны четырехугольника, вписанного в окружность, равны $a = 10$ см, $b = 4$ см, $c = 2$ см, $d = 8$ см (в этой последовательности). Найдите величину угла, образованного сторонами a и b .

12. Отношение площади боковой поверхности к площади основания правильной треугольной пирамиды равно $\sqrt{2}$. Найдите величину угла, образованного боковым ребром и высотой пирамиды.

13.  **Работайте в парах!** Диагонали боковых граней прямоугольного параллелепипеда образуют с соответствующими сторонами основания углы α и β . Найдите величину угла, образованного диагональю параллелепипеда с соответствующей диагональю его основания.

14. Известно, что две стороны треугольника равны l и m , а биссектриса угла, образованного этими сторонами, равна b . Найдите величину этого угла.



C₁

15. Составьте и решите тригонометрическое уравнение:

- а) однородное; б) вида $a \sin x + b \cos x = c$, $a, b \in \mathbb{R}^*$; в) сводимое к алгебраическому уравнению.

16*. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение, где a – действительный параметр:

- а) $a \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$; б) $(a + 1) \sin^2 x - 2 \sin x + a - 1 = 0$;
 в) $(2a + 1) \operatorname{tg}^2 2x - \operatorname{tg} 2x - a = 0$; г) $\sqrt{3} \cos x - \sin x = 3a - 1$.

§4 Тригонометрические неравенства

4.1. Понятие тригонометрического неравенства



определение

Неравенства, содержащие неизвестное только под знаком тригонометрических функций, называются **тригонометрическими неравенствами**.

Тригонометрические неравенства можно решать, используя свойства тригонометрических функций (периодичность, монотонность, соответствующие тождества и др.) и/или применяя общие методы решения неравенств (в том числе, метод интервалов). Поскольку проверка решений тригонометрических неравенств в общем случае практически невозможна, проследим за тем, чтобы производимые в процессе решения преобразования приводили к равносильным неравенствам.

Решение тригонометрических неравенств обычно сводится к решению простейших тригонометрических неравенств или систем (совокупностей) простейших тригонометрических неравенств.

4.2. Простейшие тригонометрические неравенства



определение

Неравенства вида $\sin t > a$, $\sin t < a$, $\sin t \geq a$, $\sin t \leq a$, $\cos t > a$, $\cos t < a$, $\cos t \geq a$, $\cos t \leq a$, $\operatorname{tg} t > a$, $\operatorname{tg} t < a$, $\operatorname{tg} t \geq a$, $\operatorname{tg} t \leq a$, $\operatorname{ctg} t > a$, $\operatorname{ctg} t < a$, $\operatorname{ctg} t \geq a$, $\operatorname{ctg} t \leq a$ ($a \in \mathbb{R}$) называются **простейшими тригонометрическими неравенствами**.

Простейшие тригонометрические неравенства (аналогично простейшим тригонометрическим уравнениям) можно решить:

- 1) пользуясь тригонометрической окружностью;
- 2) используя графики тригонометрических функций.

Считаем более удобным рассмотрение решений простейших тригонометрических неравенств на тригонометрической окружности.



Задание с решением

Решим на $\mathbb{R}$ неравенство $\sin t > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение:

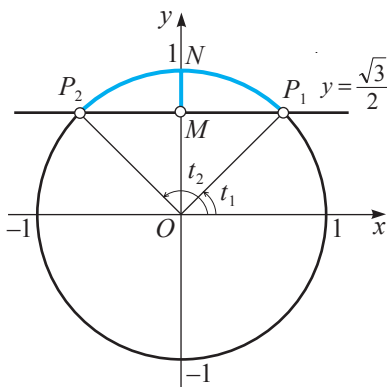


Рис. 8.24

ОДЗ: $t \in \mathbb{R}$. Сначала решаем неравенство на отрезке $[0, 2\pi]$ длины 2π . Построим тригонометрическую окружность и прямую $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (рис. 8.24). Все точки тригонометрической окружности, ординаты которых больше $\frac{\sqrt{3}}{2}$, составляют дугу P_1P_2 , а соответствующие им углы t удовлетворяют двойному неравенству $t_1 < t < t_2$. Этой дуге соответствует центральный угол P_1OP_2 . Точке P_1 соответствует значение $t_1 = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$, а точке P_2 — значение $t_2 = \pi - \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$. Итак, все решения первоначального неравенства, принадлежащие отрезку $[0, 2\pi]$ длины 2π , удовлетворяют двойному неравенству $\frac{\pi}{3} < t < \frac{2\pi}{3}$.

Поскольку функция синус периодична и ее основной период равен 2π , все остальные решения заданного неравенства можно получить, прибавив к каждому из найденных решений на этом отрезке числа вида $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Таким образом, получаем решения исходного неравенства: $\frac{\pi}{3} + 2\pi k < t < \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \right)$.

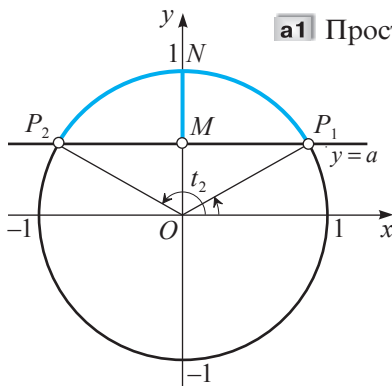


Рис. 8.25

а1 Простейшее тригонометрическое неравенство вида $\sin t > a$ (1)

- 1) При $a \geq 1$ неравенство (1) не имеет решений.
- 2) При $a < -1$ решением неравенства (1) является любое значение $t \in \mathbb{R}$.
- 3) Пусть $-1 \leq a < 1$, $\alpha = \arcsin a$. Учитывая периодичность функции синус, получаем значения t (рис. 8.25):

$$\arcsin a + 2\pi k < t < \pi - \arcsin a + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Итак, множеством решений неравенства (1) является:

$$S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (\arcsin a + 2\pi k, \pi - \arcsin a + 2\pi k).$$

a2 Простейшее тригонометрическое неравенство вида $\sin t < a$ (2)

- 1) При $a > 1$ решением неравенства (2) является любое значение $t \in \mathbb{R}$.
- 2) При $a \leq -1$ неравенство (2) не имеет решений.
- 3) При $-1 < a \leq 1$, заменой переменной $t = -z$, решение неравенства (2) сводится к решению неравенства вида $\sin t > a$. В этом случае решениями неравенства (2) являются значения t , $-\pi - \arcsin a + 2\pi k < t < \arcsin a + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, а множество решений неравенства (2) записывается так:

$$S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (-\pi - \arcsin a + 2\pi k, \arcsin a + 2\pi k).$$

a3 Простейшее тригонометрическое неравенство вида $\sin t \geq a$ (3)

- 1) При $a \leq -1$ решением неравенства (3) является любое значение $t \in \mathbb{R}$.
- 2) При $a > 1$ неравенство (3) не имеет решений.
- 3) При $-1 < a \leq 1$ решениями неравенства (3) являются значения t : $\arcsin a + 2\pi k \leq t \leq \pi - \arcsin a + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, а

$$S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [\arcsin a + 2\pi k, \pi - \arcsin a + 2\pi k].$$

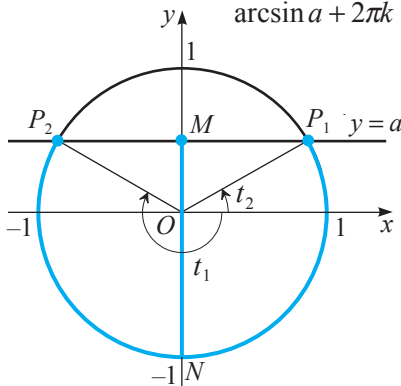


Рис. 8.26

a4 Простейшее тригонометрическое неравенство вида $\sin t \leq a$ (4)

- 1) При $a \geq 1$ решением неравенства (4) является любое значение $t \in \mathbb{R}$.
- 2) При $a < -1$ неравенство (4) не имеет решений.
- 3) При $-1 \leq a < 1$ решениями неравенства (4) являются значения t (рис. 8.26): $-\pi - \arcsin a + 2\pi k \leq t \leq \arcsin a + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, а

$$S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [-\pi - \arcsin a + 2\pi k, \arcsin a + 2\pi k].$$

О Запомните!

При решении простейших тригонометрических неравенств находят сначала их решения на промежутке длиной 2π (для синуса и косинуса) или длиной π (для тангенса и котангенса). Ответ записывается с учетом периодичности соответствующих тригонометрических функций.

61 Простейшее тригонометрическое неравенство вида $\cos t > a$ (5)

Решим на множестве $\mathbb{R}$ неравенство $\cos t > \frac{1}{2}$.

Решение:

ОДЗ: $t \in \mathbb{R}$. Решаем это неравенство на отрезке $[-\pi, \pi]$ длиной 2π .

Построим тригонометрическую окружность и прямую $x = \frac{1}{2}$ (рис. 8.27). Точки тригонометрической окружности имеют абсциссу больше $\frac{1}{2}$, если они принадлежат дуге P_1P_2 , соответствующей углу $\angle P_1OP_2$.

Имеем $P_1\left(\frac{1}{2}; -\arccos \frac{1}{2}\right)$, $P_2\left(\frac{1}{2}; \arccos \frac{1}{2}\right)$.

Следовательно, на отрезке $[-\pi, \pi]$ точка принадлежит дуге P_1P_2 , если $-\arccos \frac{1}{2} < t < \arccos \frac{1}{2}$, или $-\frac{\pi}{3} < t < \frac{\pi}{3}$. Итак, значения t , $-\frac{\pi}{3} < t < \frac{\pi}{3}$, принадлежащие отрезку $[-\pi, \pi]$ длины 2π , являются решениями исходного неравенства.



Задание
с решением

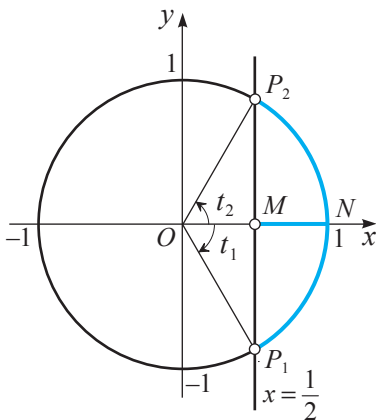


Рис. 8.27

Поскольку функция косинус периодична и ее основной период равен 2π , все остальные решения заданного неравенства получим, прибавив к каждому из найденных решений на этом отрезке числа вида $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Таким образом, решениями исходного неравенства являются значения t : $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k < t < \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \frac{\pi}{3} + 2\pi k \right)$.

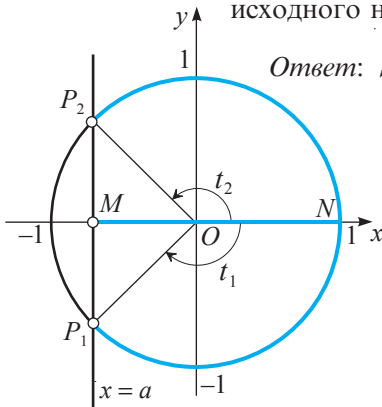


Рис. 8.28

Вернемся к неравенству $\cos t > a$. Можно доказать, что:

- 1) при $a \geq 1$ неравенство (5) не имеет решений;
- 2) при $a < -1$ решением неравенства (5) является любое значение $t \in \mathbb{R}$;
- 3) при $-1 \leq a < 1$ (рис. 8.28) решениями неравенства (5) являются значения t , $-\arccos a + 2\pi k < t < \arccos a + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Следовательно, множеством решений неравенства (5) является:

$$S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (-\arccos a + 2\pi k, \arccos a + 2\pi k).$$

62 Простейшее тригонометрическое неравенство вида $\cos t < a$ (6)

- 1) При $a > 1$ решением неравенства (6) является любое значение $t \in \mathbb{R}$.
- 2) При $a \leq -1$ неравенство (6) не имеет решений.
- 3) При $-1 < a \leq 1$ решениями неравенства (6) являются значения t , $\arccos a + 2\pi k < t < 2\pi - \arccos a + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, а множеством решений неравенства является:

$$S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (\arccos a + 2\pi k, 2\pi - \arccos a + 2\pi k).$$

63 Простейшее тригонометрическое неравенство вида $\cos t \geq a$ (7)

- 1) При $a \leq -1$ решением неравенства (7) является любое значение $t \in \mathbb{R}$.
- 2) При $a > 1$ неравенство (7) не имеет решений.
- 3) При $-1 < a \leq 1$ решениями неравенства (7) являются значения t , $-\arccos a + 2\pi k \leq t \leq \arccos a + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, а:

$$S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [-\arccos a + 2\pi k, \arccos a + 2\pi k].$$

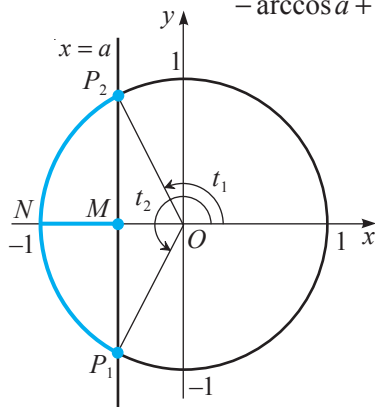


Рис. 8.29

64 Простейшее тригонометрическое неравенство вида $\cos t \leq a$ (8)

- 1) При $a \geq 1$ решением неравенства (8) является любое значение $t \in \mathbb{R}$.
- 2) При $a < -1$ неравенство (8) не имеет решений.
- 3) При $-1 \leq a < 1$ (рис. 8.29) решениями неравенства (8) являются значения t , $\arccos a + 2\pi k \leq t \leq 2\pi - \arccos a + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, а

$$S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [\arccos a + 2\pi k, 2\pi - \arccos a + 2\pi k].$$

в1 Простейшее тригонометрическое неравенство вида $\operatorname{tg} t > a$, $a \in \mathbb{R}$ (9)

Решим на $\mathbb{R}$ неравенство $\operatorname{tg} t > \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Решение:

ОДЗ: $t \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. Основной период функции тангенс равен π .

Поэтому, учитывая, что $\operatorname{arctg} a \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$, находим решения этого неравенства на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$ длиной π .



**Задание
с решением**

г2 Решениями простейшего тригонометрического неравенства вида $\operatorname{ctgt} t < a$, $a \in \mathbb{R}$, являются значения t : $\operatorname{arccctg} a + \pi k < t < \pi + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, а

$$S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (\operatorname{arccctg} a + \pi k, \pi + \pi k). \quad (15)$$

г3 Решениями простейшего тригонометрического неравенства вида $\operatorname{ctgt} t \geq a$, $a \in \mathbb{R}$, являются значения t : $\pi k < t \leq \operatorname{arccctg} a + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, а

$$S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (\pi k, \operatorname{arccctg} a + \pi k]. \quad (16)$$

г4 Решениями простейшего тригонометрического неравенства вида $\operatorname{ctgt} t \leq a$, $a \in \mathbb{R}$, являются значения t : $\operatorname{arccctg} a + \pi k \leq t < \pi + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, а

$$S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [\operatorname{arccctg} a + \pi k, \pi + \pi k). \quad (17)$$



Задание

Выведите формулы (14)–(17).

Упражнения и задачи



Реальный профиль

A₁

Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство (1–2):

1. а) $\sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\sin x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\sin x < -2$; д) $\cos x < \frac{1}{2}$;
 е) $\cos x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$; ж) $\cos x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$; з) $\cos x \leq 4$; и) $\operatorname{tg} x > \sqrt{3}$; к) $\operatorname{tg} x < -\frac{\sqrt{3}}{3}$;
 л) $\operatorname{tg} x \geq -2$; м) $\operatorname{tg} x \leq 1$; н) $\operatorname{ctg} x < 1$; о) $\operatorname{ctg} x \leq -\sqrt{3}$; п) $\operatorname{ctg} x > \frac{\sqrt{3}}{3}$;
 р) $\operatorname{ctg} x > -3$; с) $2\cos^2 x + \cos x \leq 0$; т) $\sin^2 x - 5\sin x \geq 0$; у) $\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x - 3 > 0$.
2. а) $\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\cos 3x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\operatorname{ctg} 5x > -1$;
 г) $\operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) < -\sqrt{3}$; д) $\cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) > -1$; е) $\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right) \leq 0$.

B₁

3. **Работайте в парах!** Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство.

- а) $\sin x - \cos x < \sqrt{2}$; б) $\sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x \geq 1$; в) $\sin 5x + \cos 5x > -1$;
 г) $\sin 2x \cos x + \sin x \cos 2x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$; е*) $\cos 2x + |\cos x| > 0$; ф*) $\sin^2 x - \cos^2 x < 3\sin x - 2$.

4. **Исследуйте!** Найдите решения уравнения $2\cos 2x - 4\cos x - 1 = 0$, для которых $|\sin x| \geq \frac{1}{2}$.

5. **Исследуйте!** Найдите решения уравнения $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x$, для которых $\cos x \geq -\frac{1}{2}$.

C₁

6. Составьте тригонометрическое неравенство, которое решается методом введения вспомогательного неизвестного.
- 7*. Покажите, что $\sin(\cos x) < \cos(\sin x)$, для любых $x \in \mathbb{R}$.
8. Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство $|\sin x| \leq |\cos x|$.

Упражнения и задачи на повторение



Реальный профиль

 А₁

1. Вычислите значение выражения:

а) $\sin \frac{3\pi}{2} - \cos 180^\circ + \cos^2 15^\circ$;

б) $\operatorname{ctg} 90^\circ \cdot \sin \frac{\pi}{17} + \sin^2 \frac{\pi}{6}$.

 2. Вычислите $\cos 2\alpha$, если известно, что:

а) $\cos \alpha = 0,6$;

б) $\sin \alpha = -0,4$.

3. Найдите значение выражения:

а) $\frac{3\cos(-57^\circ)}{\sin(-33^\circ)}$;

б) $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) - \sin(\pi - \alpha)$.

 4. Лестница, приставленная к вертикальной стене, образует со стеной угол в 15° . Найдите длину лестницы, если расстояние от основания лестницы до стены равно 1,2 м.

 5. Маятник длиной 20 см качается так, что угол между двумя его крайними положениями равен 60° . Найдите высоту, на которую поднимается конец маятника относительно его положения равновесия.

 6. Запишите в порядке возрастания значения: $\sin \frac{4\pi}{6}$, $\cos \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{\pi}{6}$, $\operatorname{ctg} \frac{3\pi}{4}$.

 7.  **Работайте в парах!** Пусть:

а) $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ и $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Найдите $\cos(90^\circ + \alpha)$.

б) $\sin \alpha = 0,28$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Найдите $\sin 2\alpha$.

в) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Найдите $\sin \alpha$.

г) $\operatorname{tg} \alpha = 3$, $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = 1$. Найдите $\operatorname{tg} \beta$.

д) $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = 3$. Найдите $\operatorname{ctg} \beta$.

8. Вычислите:

а) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$;

б) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$;

в) $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})$.

 В₁

 9.  **Исследуйте!** Турист подошел к реке. На противоположном берегу у воды растет дерево (вертикально).

а) Как турист может определить ширину реки при помощи транспорта?

б) Как турист может определить ширину реки без транспорта?

10. Зубчатое колесо содержит 72 зуба. Выразите в градусах величину угла, если колесо повернуть на: 1 зуб; 30 зубьев; 144 зуба; 300 зубьев.

 11. Сравните с 1 значение выражения $\sqrt{a}$, если $a = \cos 110^\circ \sin \frac{5\pi}{3} \cos 10^\circ$.

12. Найдите, используя свойства тригонометрических функций, знак значения выражения:

а) $\frac{\operatorname{ctg} 10^\circ + \operatorname{ctg}(-70^\circ)}{\cos 10^\circ + \cos 160^\circ}$;

б) $\frac{\cos 1 - \cos \frac{\pi}{3}}{\operatorname{ctg} \frac{5\pi}{6} - \operatorname{ctg} 2}$.

 13. Исследуйте на четность или нечетность функцию $f: D \rightarrow \mathbb{R}$:

а) $f(x) = (\sin x + \cos x)^2$;

б) $f(x) = \sin 3x - \operatorname{tg} x$.

 14. Известно, что $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = m$. Найдите:

а) $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha$;

б) $\operatorname{tg}^3 \alpha + \operatorname{ctg}^3 \alpha$.

 15.  **Исследуйте!** Верно ли неравенство:

а) $\sin(287^\circ - \alpha) \cos \alpha + \cos(287^\circ - \alpha) \sin \alpha < 0$.

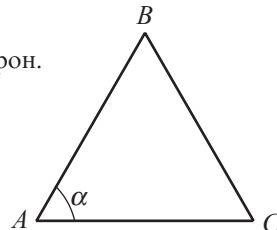
б) $\cos(149^\circ + \alpha) \cos \alpha + \sin(149^\circ + \alpha) \sin \alpha > 0$.



16. (ЕЭН 2024) Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $\frac{18\cos^2 x + 12\sin^2 x + 11\sqrt{3}\cos x}{\sqrt{\pi x - x^2}} = 0$.
17. Не используя калькулятор, вычислите $\sin 17^\circ + \cos 253^\circ + \operatorname{ctg} 315^\circ$.
18.  **Работайте в парах!** Используя 6 различных способов, решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $\sin x + \cos x = 1$.
19. Найдите решения уравнения $\log_{\frac{2}{3}} \sin x - 2 \log_{\frac{2}{3}} \cos x = 1$, принадлежащие интервалу $[-350^\circ, 2^\circ]$.
20. Радиус круга, вписанного в равнобедренный треугольник, в 4 раза меньше радиуса круга, описанного около этого треугольника. Найдите величины углов треугольника.

C

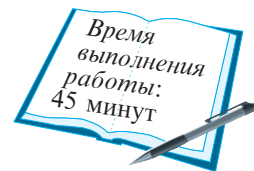
21. Угол при основании равнобедренного треугольника равен α .
- Найдите отношение m площади треугольника к сумме квадратов длин его сторон.
 - Докажите равенство $m = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha + 3 \operatorname{ctg} \alpha}$.
 - Найдите значение α , для которого $m = \frac{1}{8}$.
 - Найдите значения α , для которых m принимает наибольшее значение.
 - Найдите множество значений отношения m .
- 22*. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:
- $|\sin x - 3 \cos x| = 3 \sin x + \cos x - 3$;
 - $\log_3 (2 \sin x \sin 2x) + \log_{\frac{1}{3}} (5 \cos x + 4 \sin 2x) = 0$.
- 23*. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:
- $\sqrt{5} \sin 2x - \sqrt{1 + 8 \sin x \cos x} = 0$;
 - $\sqrt{10} \cos x - \sqrt{4 \cos x - \cos 2x} = 0$.



24.  **Работайте в группах! Проект.** Приложения тригонометрических элементов в строительстве.

ИТОГОВЫЙ ТЕСТ

Реальный профиль

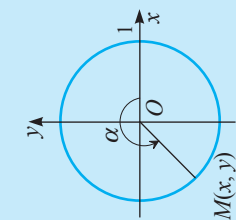


1. Укажите верный вариант.
Угол $\alpha = 272^\circ$ принадлежит
А I четверти. В II четверти. С III четверти. D IV четверти.
2. Найдите истинностное значение высказывания:
„Если $\sin x + \cos x = a$, то $\sin^3 x + \cos^3 x = 1,5a^2 - 0,5a^3$ “.
Обоснуйте.
3. Пусть $\sin \alpha = 0,6$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Вычислите $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$, $\operatorname{ctg} 2\alpha$.
4. Найдите решения уравнения $2 \operatorname{ctg} 2x - \operatorname{ctg} x = \sin 2x + 3 \sin x$, для которых $\cos 2x \geq 0$.
5. Дана функция $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{-\operatorname{tg} 2x}$. Найдите значения x , где $0 < x < \frac{\pi}{2}$, при которых функция f определена.
6. Длины сторон параллелограмма равны 5 см и 3 см, а высота, проведенная к большей стороне, равна 2 см. Вычислите величину острого угла, образованного диагоналями параллелограмма.



Тригонометрические функции

Обратные тригонометрические функции



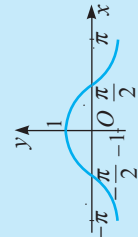
$$\begin{aligned} \sin, \cos: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}; \\ \operatorname{tg}: \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\} &\rightarrow \mathbb{R}; \\ \operatorname{ctg}: \mathbb{R} \setminus \{ \pi k \mid k \in \mathbb{Z} \} &\rightarrow \mathbb{R}; \\ \cos \alpha = x, \sin \alpha = y; \\ \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}; \operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y}; \\ \sec \alpha = \frac{1}{x}, \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{y}. \end{aligned}$$

Свойства

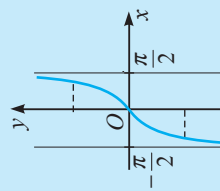
$$\begin{aligned} f(x) = \sin x \\ 1^\circ \sin x = 0 &\Rightarrow x = \pi k, k \in \mathbb{Z}; \\ 2^\circ &\text{нечетная}; \\ 3^\circ \text{основной период} &\text{равен } 2\pi; \\ 4^\circ \text{возрастающая на} &\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k \right], k \in \mathbb{Z}, \\ &\text{убывающая на} \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \right], k \in \mathbb{Z}; \\ 5^\circ x_{\max} = \frac{\pi}{2}, x_{\min} = -\frac{\pi}{2}, &y_{\max} = 1; \\ &y_{\min} = -1. \end{aligned}$$



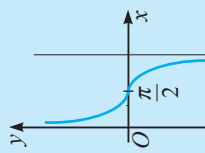
$$\begin{aligned} f(x) = \cos x \\ 1^\circ \cos x = 0 &\Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; \\ 2^\circ &\text{парная}; \\ 3^\circ \text{основной период} &\text{равен } 2\pi; \\ 4^\circ \text{возрастающая на} &[-\pi + 2\pi k, 2\pi k], k \in \mathbb{Z}, \\ &\text{убывающая на} [2\pi k, \pi + 2\pi k], k \in \mathbb{Z}; \\ 5^\circ x_{\max} = 2\pi k, x_{\min} = &2\pi k + \pi, k \in \mathbb{Z}; \\ &y_{\max} = 1; \\ &y_{\min} = -1. \end{aligned}$$



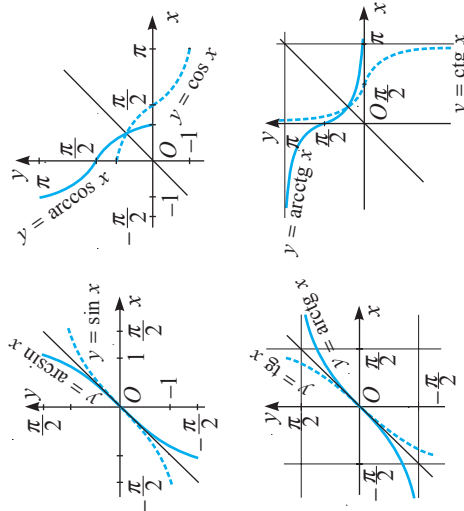
$$\begin{aligned} f(x) = \operatorname{tg} x \\ 1^\circ \operatorname{tg} x = 0 &\Rightarrow x = \pi k, k \in \mathbb{Z}; \\ 2^\circ &\text{нечетная}; \\ 3^\circ \text{основной период} &\text{равен } 2\pi; \\ 4^\circ \text{возрастающая на} &\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k \right), k \in \mathbb{Z}; \\ 5^\circ &\text{не имеет экстремумов.} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} f(x) = \operatorname{ctg} x \\ 1^\circ \operatorname{ctg} x = 0 &\Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k; \\ 2^\circ &\text{нечетная}; \\ 3^\circ \text{основной период} &\text{равен } 2\pi; \\ 4^\circ \text{убывающая на} &(\pi k, \pi + \pi k), k \in \mathbb{Z}; \\ 5^\circ &\text{не имеет экстремумов.} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \arcsin: [-1, 1] &\rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right], \arcsin a = t \Leftrightarrow \sin t = a; \\ \arccos: [-1, 1] &\rightarrow [0, \pi], \arccos a = t \Leftrightarrow \cos t = a; \\ \operatorname{arctg}: \mathbb{R} &\rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right), \operatorname{arctg} a = t \Leftrightarrow \operatorname{tg} t = a; \\ \operatorname{arctg}: \mathbb{R} &\rightarrow (0, \pi), \operatorname{arctg} a = t \Leftrightarrow \operatorname{ctg} t = a. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \arcsin(-a) &= -\arcsin a; \\ \arccos(-a) &= \pi - \arccos a; \\ \operatorname{arctg}(-a) &= -\operatorname{arctg} a; \\ \operatorname{arctg}(-a) &= \pi - \operatorname{arctg} a; \\ \arcsin a + \arccos a &= \frac{\pi}{2}, a \in [-1, 1]; \\ \operatorname{arctg} a + \operatorname{arctg} a &= \frac{\pi}{2}, a \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Тригонометрическое древо

Основные тригонометрические тождества:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$$

Формулы приведения:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha; \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha; \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{ctg} \alpha; \quad \cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin \alpha; \quad \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

и т. д.

$$\sin \alpha \sin \beta =$$

$$= \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\cos \alpha \cos \beta =$$

$$= \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$\cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha - \beta)\right] =$$

$$= \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin[\alpha - (-\beta)] =$$

$$= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \operatorname{tg}[\alpha + (-\beta)]$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \operatorname{ctg}[\alpha + (-\beta)]$$

Формулы фундаментальной тригонометрической подстановки

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \neq (2n+1)\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \neq (2n+1)\pi, \quad \alpha \neq \frac{(2n+1)\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \neq (2n+1)\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \neq \pi m, \quad \alpha \neq (2n+1)\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Геометрия — лучшая и самая простая из всех логик, наиболее подходящая для придания негибкости суждениям и разуму.

Дени Дидро

Цели

- распознавание и применение четырехугольников и многоугольников в различных контекстах;
- использованием изученных свойств четырехугольников и многоугольников в реальных и/или смоделированных ситуациях;
- выявление и применение золотого сечения в различных областях.

§1 Параллелограмм и его свойства. Трапеция

1.1. Параллелограмм

○ Вспомним

Замечание

В дальнейшем будем рассматривать только выпуклые четырехугольники (многоугольники), т. е. четырехугольники (многоугольники), лежащие в одной полуплоскости относительно любой прямой, содержащей его сторону.



Определение

Четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны, называется **параллелограммом**.

Теорема 1

Четырехугольник является параллелограммом тогда и только тогда, когда противоположные стороны попарно конгруэнтны.

Теорема 2

Четырехугольник является параллелограммом тогда и только тогда, когда две противоположные стороны параллельны и конгруэнтны.

Теорема 3

Четырехугольник является параллелограммом тогда и только тогда, когда противоположные углы попарно конгруэнтны.

Теорема 4

Четырехугольник является параллелограммом тогда и только тогда, когда его диагонали в точке пересечения делятся пополам.



Задание

- Докажите теоремы 1–4.

Теорема 5

(теорема о равноудаленных параллельных прямых)

Пусть прямые a и d не параллельны. Если на прямой a отложить конгруэнтные отрезки $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$ и через их концы провести прямые, параллельные прямой d , то эти прямые отсекут на любой другой прямой b ($b \nparallel d$) конгруэнтные отрезки $B_1B_2, B_2B_3, \dots, B_{n-1}B_n$ (рис. 9.1).

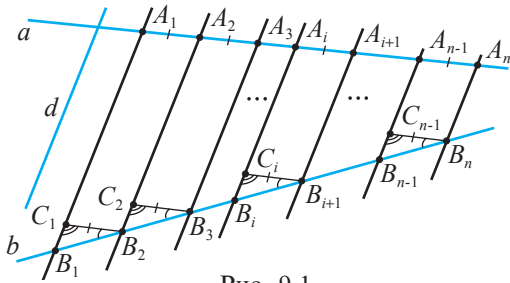


Рис. 9.1

Доказательство:

Проведем через точки B_{i+1} полупрямые, параллельные прямой a , и обозначим через C_i их точки пересечения с прямыми A_iB_i . Заметим, что четырехугольники $A_iA_{i+1}B_{i+1}C_i$ являются параллелограммами, откуда следуют соотношения $[C_iB_{i+1}] \equiv [A_iA_{i+1}]$. Применяя II признак (УСУ), можно доказать, что $\triangle B_1C_1B_2 \equiv \triangle B_2C_2B_3 \equiv \dots \equiv \triangle B_iC_iB_{i+1} \equiv \dots \equiv \triangle B_{n-1}C_{n-1}B_n$, откуда следует, что $[B_1B_2] \equiv [B_2B_3] \equiv \dots \equiv [B_iB_{i+1}] \equiv \dots \equiv [B_{n-1}B_n]$. ►

**Частные виды параллелограмма**

Прямоугольник – это параллелограмм, у которого один угол прямой. Из теорем о параллелограммах следует, что у прямоугольника все углы прямые.

**Теорема 6**

Параллелограмм является прямоугольником тогда и только тогда, когда его диагонали конгруэнтны.

Ромб – это параллелограмм, у которого смежные стороны конгруэнтны. Следовательно, у ромба все стороны конгруэнтны.

**Теорема 7**

Параллелограмм является ромбом тогда и только тогда, когда его диагонали перпендикулярны или являются биссектрисами его углов.

**Задание**

• Докажите теоремы 6, 7.

Квадрат – это ромб с одним прямым углом или прямоугольник с конгруэнтными смежными сторонами.

1.2. Золотое сечение

В живописи и архитектуре прямоугольник длины L и ширины l называется **золотым прямоугольником**, если $\frac{L}{l} = \frac{L+l}{L}$.

Это равенство может быть записано и в виде: $1 + \frac{l}{L} = \frac{L}{l}$.

Обозначив $\frac{L}{l} = x$, $x > 0$, получим: $x = \frac{1}{x} + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x^2 - x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Это иррациональное число записывается в виде $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ и называется **золотым числом**.

Итак, $\varphi = 1,61803\dots$

Говорят, что точка $C \in [AB]$ делит отрезок AB в „золотом“ отношении или **золотом сечении**,

если $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$ (рис. 9.2).



Рис. 9.2

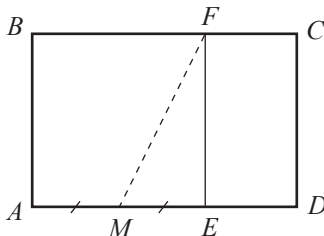


Рис. 9.3

Если обозначим $AC = L$, $CB = l$, то вышеуказанное равенство записывается в виде $\frac{L+l}{L} = \frac{L}{l}$, то есть такое же равенство, как и в случае золотого прямоугольника.

Пусть $ABCD$ – золотой прямоугольник и $AD = L$, $AB = l$, $L > l$ (рис. 9.3).

Пусть $AEFB$ – квадрат со стороной $AE = AB = l$, а M – середина отрезка AE . Тогда из прямоугольного треугольника FEM получим:

$$FM = \sqrt{ME^2 + FE^2} = \sqrt{\frac{l^2}{4} + l^2} = l \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Исходя из того, что $\frac{AD}{AB} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и $AD = AM + MD$, получим:

$$\frac{AM + MD}{AB} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \frac{\frac{l}{2} + MD}{l} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{MD}{l} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \frac{MD}{l} = \frac{\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow MD = l \frac{\sqrt{5}}{2} = MF.$$

Таким образом, золотой прямоугольник $ABCD$ распадается на квадрат $AEFB$ и новый прямоугольник $EFCD$, который также является золотым прямоугольником. Докажите!

Из рассуждений выше следует алгоритм построения золотого прямоугольника, используя данный квадрат $AEFB$: отмечаем через M середину стороны AE и с помощью циркуля находим точку D пересечения луча $[AE$ с окружностью с центром M и радиусом MF . Имея три вершины, A , B и D , легко определяется и четвертая вершина C золотого прямоугольника $ABCD$.

Равнобедренный треугольник с углами 36° , 72° , 72° называется **золотым треугольником**, поскольку отношение боковой стороны к основанию является золотым сечением (рис. 9.4).

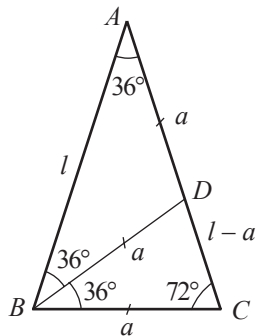


Рис. 9.4

Задание

Используя рисунок 9.4 и применяя теорему о подобии треугольников или теорему о биссектрисе внутреннего угла треугольника, докажите сформулированный выше вывод.

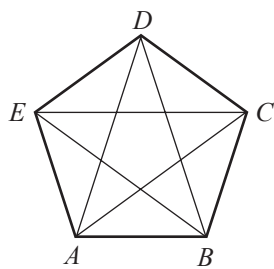


Рис. 9.5

Заметив, что $\triangle ADB$ является равнобедренным, с углами 36° , 72° , 72° , и используя полученный результат, можно доказать, что отношение диагонали правильного пятиугольника к его стороне также составляет золотое сечение:

$$\frac{AD}{BA} = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad (\text{рис. 9.5}).$$

Определенное Евклидом более двух тысяч лет назад, золотое сечение проявляется в самых разных ситуациях: в раковинах моллюсков, в расположении семян подсолнуха, в формах галактик, в кристаллах некоторых веществ, в живописи, в архитектуре, в музыке.

„Золотое сечение“ также можно найти в знаменитом творении Леонардо да Винчи *Джоконда* (или *Мона Лиза*). Автор намеренно использовал „золотое сечение“, создав одну из самых известных картин мира.

Золотое сечение было известно с древних времен египтянам и грекам, но открыто оно было только в III веке нашей эры Евклидом.

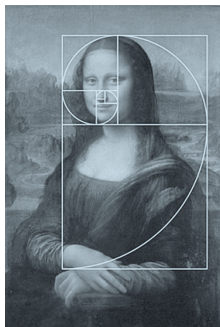
Золотое сечение (иногда также называемое **золотым отношением**, **золотой пропорцией**, **золотым числом**) (на латыни *sectio aurea*), обозначаемое греческой буквой „Ф“ (заглавная фи) или „φ“ (строчная фи), которое читается как „фи“, является первым иррациональным числом, открытым и определенным в истории. Оно примерно равно 1,618033.

Евклид определил „Ф“ как простое деление отрезка на то, что он назвал „средним“ и „крайним отношением“.

Золотое сечение/золотое число можно определить разными способами. Самое значимое математическое понятие, связанное с золотым сечением, это **последовательность Фибоначчи** 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ... Разделив любой член последовательности (начиная с четвертого) на предыдущий член, получим приблизительно золотое число. Последовательность Фибоначчи будет изучена в 11-м классе. Последовательность Фибоначчи и золотое сечение находят применение в различных областях.

Леонардо да Винчи использовал золотое сечение (так называемую *божественную пропорцию*) и в своем шедевре *Тайная вечеря*.

Золотое сечение может присутствовать и в музыке. Предполагается, что Бах и Бетховен учитывали золотое сечение в своих произведениях.



1.3. Трапеция

Задание
с решением

Трапеция – это четырехугольник, у которого две противоположные стороны параллельны, а две другие непараллельны. Параллельные стороны называются **основаниями** трапеции, а две другие – **боковыми сторонами**.

Трапеция с конгруэнтными боковыми сторонами называется **равнобокой** (или **равнобокой, равнобедренной**) **трапецией**.

Средней линией трапеции называется отрезок, который соединяет середины боковых сторон. Средняя линия трапеции параллельна основаниям и ее длина равна полусумме длин оснований трапеции.

Меньшее основание равнобокой трапеции конгруэнтно боковой стороне, а диагональ трапеции перпендикулярна боковой стороне. Найдем величины внутренних углов трапеции (рис. 9.6).

Решение:

Пусть $ABCD$ – равнобокая трапеция, у которой $[AB] \equiv [BC] \equiv [CD]$ и $AC \perp CD$. Поскольку $BC \parallel AD$ и AC – секущая, то $m(\angle BCA) = m(\angle CAD) = \alpha$. Так как $\triangle ABC$ – равнобедренный, $[AB] \equiv [BC]$, то $m(\angle BAC) = \alpha$.

В силу того, что углы при основании равнобокой трапеции равны, имеем: $m(\angle CDA) = m(\angle BAD) = 2\alpha$. Из прямоугольного треугольника ACD получаем: $3\alpha = 90^\circ \Leftrightarrow \alpha = 30^\circ$.

Тогда: $m(\angle CDA) = m(\angle BAD) = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$, $m(\angle ABC) = m(\angle BCD) = \alpha + 90^\circ = 120^\circ$.

Ответ: $120^\circ, 120^\circ, 60^\circ, 60^\circ$.

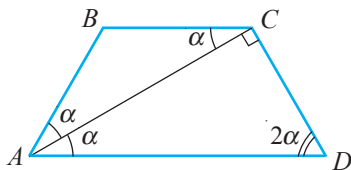


Рис. 9.6

1.4. Вписанные и описанные четырехугольники

Напомним, что угол, вершина которого расположена на окружности, а стороны пересекают окружность, называется **вписанным углом в окружность** (рис. 9.7).



Теорема 8

Величина угла, вписанного в окружность, равна половине величины дуги, заключенной между ее сторонами:

$$m(\angle ABC) = \frac{1}{2}m(\text{дуга } AC) \quad (\text{рис. 9.7}).$$



определения

- Четырехугольник называется **вписанным в окружность**, если все его вершины расположены на окружности.
- Четырехугольник называется **вписываемым**, если около него можно описать окружность.
- Четырехугольник называется **описанным около окружности**, если все его стороны касаются окружности.
- Четырехугольник называется **описываемым**, если в него можно вписать окружность.



Теорема 9

Чтобы четырехугольник был вписываемым, необходимо и достаточно, чтобы сумма величин противоположных углов была равна 180° (рис. 9.8 а)).



Теорема 10

Чтобы четырехугольник был описываемым, необходимо и достаточно, чтобы угол, образованный диагональю и стороной, был равен углу, образованному противоположной стороной и второй диагональю (рис. 9.8 б)).



Теорема 11

Чтобы четырехугольник был вписываемым, необходимо и достаточно, чтобы внутренний угол был равен внешнему углу при противоположной ему вершине (рис. 9.8 в)).

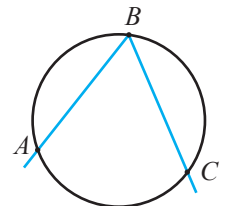


Рис. 9.7

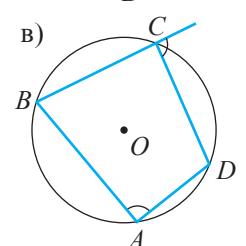
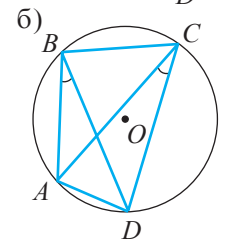
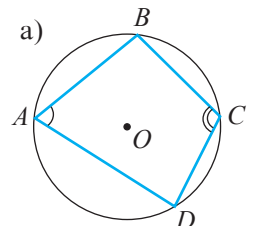


Рис. 9.8

Теорема 12

Четырехугольник можно описать окружностью тогда и только тогда, когда суммы длин его противоположных сторон равны: $AB + CD = AD + BC$ (рис. 9.9).

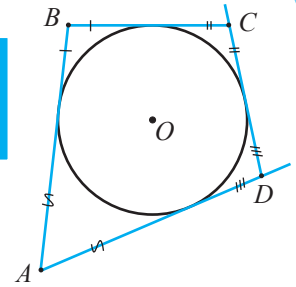


Рис. 9.9

Задание

• Докажите теоремы 8–12.

Задачи

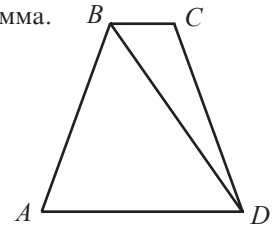


Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт

A

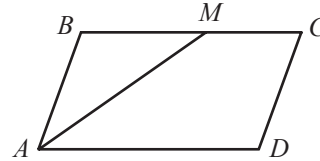
- Длины диагоналей четырехугольника равны 16 см и 28 см. Найдите периметр четырехугольника, вершинами которого являются середины сторон заданного четырехугольника.
- Биссектриса угла C параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону AD в точке E . Найдите длину отрезка AE , если $AB = 18$ см и $AD = 30$ см
- Один из углов параллелограмма равен 50° . Найдите остальные углы параллелограмма.
- Диагональ параллелограмма делит его острый угол на два угла: в 30° и 40° . Найдите углы параллелограмма.
- (ЕГЭ 2018) На рисунке изображена равнобедренная трапеция $ABCD$, в которой $BC \parallel AD$, диагональ BD является биссектрисой угла ABC и $m(\angle ABD) = 55^\circ$. Впишите в рамку градусную величину угла BAD .

$$m(\angle BAD) = \boxed{}.$$

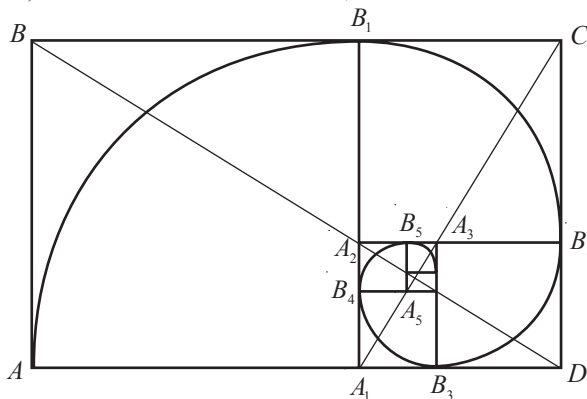


- (ЕГЭ 2017) На рисунке изображен параллелограмм $ABCD$, в котором $m(\angle BAD) = 70^\circ$, а AM , $M \in (BC)$, биссектриса угла BAD . Впишите в рамку градусную величину угла BMA .

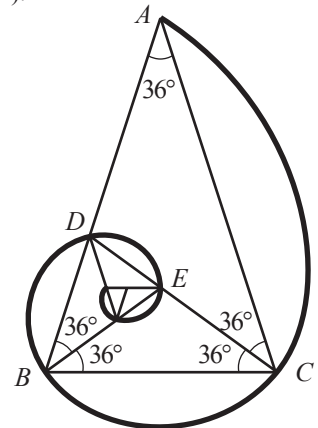
$$m(\angle BMA) = \boxed{}.$$



- Пусть золотой прямоугольник $ABCD$ разложен на квадрат ABB_1A_1 и новый золотой прямоугольник A_1B_1CD . Разложите полученный золотой прямоугольник на квадрат $A_2B_1CB_2$ и новый золотой прямоугольник $A_1A_2B_2D$. Продолжите этот процесс разложения каждого полученного нового золотого прямоугольника на предыдущем этапе, насколько это возможно (см. рисунок). Соедините точки A и B_1 , B_1 и B_2 , B_2 и B_3 и т. д. дугами окружности $\cup AB_1$, $\cup B_1B_2$, $\cup B_2B_3$, $\cup B_3B_4$, ... и получите часть спирали, называемой логарифмической спиралью (см. рисунок).

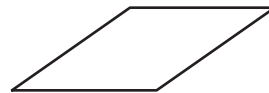


- Нарисуйте часть логарифмической спирали, начиная с золотого треугольника ABC , который разложен на равнобедренный треугольник ACD и новый золотой треугольник BCD . Продолжите процесс разложения нового золотого треугольника, полученного на предыдущем шаге, насколько это возможно (см. рисунок).



В

9. Разность между величинами противоположащих углов равнобокой трапеции равна 30° . Найдите величины углов трапеции.
10. (ЕАГ 2021) Диагонали ромба равны 12 см и 16 см. Найдите высоту ромба.
11. (ЕАГ 2011) Плитка для покрытия пола имеет форму ромба с тупым углом 150° и высотой 24 см. Хватит ли 100 таких плиток для покрытия всего пола в помещении, размеры которого $3 \text{ м} \times 4 \text{ м}$?
12.  **Исследуйте!** а) Пупок делит высоту человеческого тела по принципу золотого сечения.
б) Если человек среднего роста стоит на ногах с поднятой рукой, то полученная высота делится его грудиной по принципу золотого сечения.
13. В равнобедренном треугольнике биссектриса угла при основании конгруэнтна основанию. Покажите, что этот треугольник является золотым треугольником.
14. Учитывая, что основание пирамиды Хеопса представляет собой квадрат со стороной, равной приблизительно 230,35 м, а его высота равна приблизительно 146,73 м, проверьте, находятся ли высота боковой грани и сторона основания пирамиды в золотом отношении.
15. Точки M и N расположены в одной полуплоскости, ограниченной прямой d . Расстояние от точки M до прямой d равно 12 см, а расстояние от точки N до прямой d равно 28 см. Определите расстояние от середины отрезка MN до прямой d .



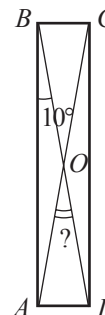
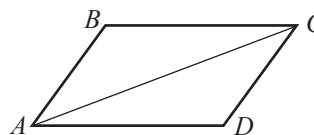
С

16.  **Работайте в парах!** В равнобокой трапеции основание высоты, проведенной из вершины тупого угла, делит большее основание на отрезки длиной 8 см и 32 см. Найдите длины оснований трапеции.
17. Длины оснований трапеции относятся как 3:2, а длина ее средней линии равна 70 см. Найдите длины оснований трапеции.

Реальный профиль

А₁

1. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке E . Докажите, что треугольник ABE равнобедренный.
2. Докажите, что длина медианы, проведенной к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна половине длины гипотенузы.
3. (ЕАГ 2014) На рисунке изображен параллелограмм $ABCD$, в котором $[AC]$ – биссектриса угла BAD и $AB = 4 \text{ см}$. Впишите в рамку периметр параллелограмма $ABCD$.
 $P_{ABCD} = \boxed{} \text{ см}$.
4. (ЕАГ 2013) На рисунке изображен прямоугольник $ABCD$, $m(\angle ABD) = 10^\circ$. Используя данные рисунка, впишите в рамку величину угла AOD в градусах.
 $m(\angle AOD) = \boxed{}$.
5. Найдите диагональ и боковую сторону равнобедренной трапеции с основаниями 20 см и 12 см, если известно, что центр окружности, описывающей трапецию, расположен на большем основании.
6. Найдите радиус окружности описанной равнобедренной трапеции с основаниями 21 см и 9 см и высотой 8 см.
7. В равнобедренную трапецию, боковая сторона которой равна 17 см, вписана окружность диаметром 15 см. Найдите основания трапеции.



B₁

8. Окружность радиусом 2 дм вписана в ромб с углом 60° . Найдите стороны ромба.
9.  **Работайте в парах!** В окружность радиусом R вписан квадрат. Из одной вершины этого квадрата проведены две хорды, стягивающие дуги величиной 120° . Найдите длину отрезка диагонали квадрата, заключенного между этими хордами.
10. В параллелограмме биссектрисы всех внутренних углов пересекаются в четырех различных точках. Докажите, что эти точки являются вершинами прямоугольника.

C₁

11. Сторона BC четырехугольника $ABCD$ является диаметром описанной окружности этого четырехугольника. Известно, что $BC = 8$ см, $BD = 4\sqrt{2}$ см и $m(\angle DCA) : m(\angle ACB) = 2 : 1$. Найдите длину стороны AB .
12. Центр окружности, вписанной в прямоугольную трапецию, расположен на расстояниях $3\sqrt{10}$ м и $9\sqrt{10}$ м от концов одной из боковых сторон. Найдите длины сторон трапеции.
13. Основания трапеции равны 6 см и 24 см. Найдите радиусы вписанной и описанной окружностей трапеции.
14.  **Исследуйте!** Длины оснований равнобедренной трапеции равны a и b ($a > b$). Покажите, что основание высоты трапеции, построенной из вершины тупого угла, делит большое основание на два отрезка с длинами $\frac{1}{2}(a+b)$ и $\frac{1}{2}(a-b)$.
15. Длины диагоналей четырехугольника равны d_1 и d_2 . Найдите периметр четырехугольника, вершины которого являются серединами сторон данного четырехугольника.
16. Основание высоты, проведенной из вершины тупого угла равнобедренной трапеции, делит основание трапеции на два отрезка. Найдите отношение длин этих отрезков, если длины оснований равны 40 см и 56 см.

§2 Многоугольники. Правильные многоугольники

2.1. Понятие многоугольника



определение

Ломаной $A_1A_2A_3\dots A_n$ называется объединение отрезков $[A_1A_2]$, $[A_2A_3]$, ..., $[A_{n-1}A_n]$, где точки A_i, A_{i+1}, A_{i+2} не являются коллинеарными для всех $i \in \{1, 2, 3, \dots, n-2\}$ (рис. 9.10).

Вспомним

Точки $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ называются **вершинами** ломаной, а отрезки $[A_1A_2]$, $[A_2A_3]$, ..., $[A_{n-1}A_n]$ – **звеньями** ломаной. Звенья ломаной называются **смежными**, если они имеют общую вершину, и **несмежными** – в противном случае.

Ломаная называется **простой**, если любые ее два несмежных звена не пересекаются (рис. 9.10).

Если вершины A_1, A_{n-1} и A_n , а также вершины A_1, A_2 и A_n ломаной $A_1A_2A_3\dots A_n$ неколлинеарны, то объединение этой ломаной с отрезком $[A_1A_n]$ называется

замкнутой ломаной, и обозначается также через $A_1A_2A_3\dots A_n$. Например, на рисунке 9.11 изображена замкнутая ломаная $A_1A_2\dots A_6A_7$.

Простая замкнутая ломаная разбивает множество точек плоскости на три непересекающиеся множества: **ломаная**, **внутренняя область** ломаной и **внешняя область** ломаной.

Любой отрезок ($[E_1E_2]$), соединяющий точку, принадлежащую внутренней области ломаной, с точкой, принадлежащей внешней области этой ломаной, пересекает ломаную (рис. 9.11).

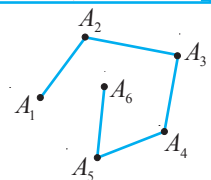


Рис. 9.10

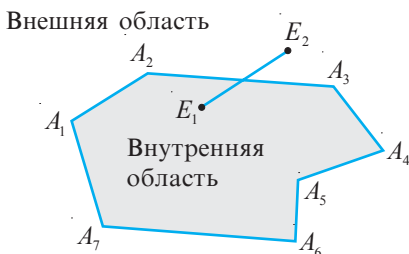
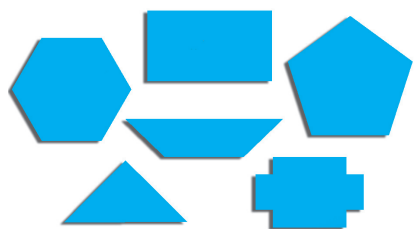


Рис. 9.11



Простая замкнутая ломаная называется **многоугольником**. Вершины ломаной называются **вершинами** многоугольника, а ее звенья – **сторонами** многоугольника.

Многоугольник называется **выпуклым**, если он лежит в одной замкнутой полуплоскости, заданной несущей прямой, любой из его сторон (рис. 9.12 а), б)). В противном случае многоугольник называется **невыпуклым** (рис. 9.12 в), г)).

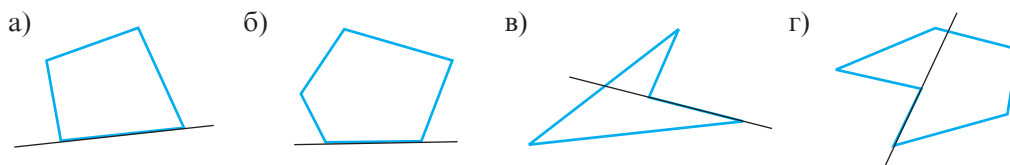


Рис. 9.12

Объединение многоугольника и его внутренней области называется **плоским многоугольником**.

Внутренним углом выпуклого многоугольника при данной вершине называется угол, образованный несущими полупрямыми его двух смежных сторон. **Внешним углом** выпуклого многоугольника при данной вершине называется угол, смежный внутреннему углу многоугольника при этой вершине. Отрезки, соединяющие не соседние вершины многоугольника, называются **диагоналями** многоугольника. Число сторон многоугольника равно числу углов, поэтому многоугольники называют по числу углов. Многоугольниками являются: **треугольник**, **четырёхугольник**, **пятиугольник** и др.

2.2. Правильные многоугольники

Вспомним

Определение

Выпуклый многоугольник называется **правильным многоугольником**, если у него все стороны и все углы конгруэнтны.

Простейшими правильными многоугольниками являются равносторонний треугольник и квадрат.

Из каждой вершины выпуклого n -угольника можно провести $n-3$ диагонали, которые разбивают n -угольник на $n-2$ треугольников (рис. 9.13). Так как сумма величин внутренних углов каждого треугольника равна 180° , то сумма S_n величин внутренних углов выпуклого n -угольника равна $180^\circ(n-2)$, то есть $S_n = 180^\circ(n-2)$.

Следовательно, величина β_n внутреннего угла правильного n -угольника вычисляется по формуле:

$$\beta_n = \frac{180^\circ(n-2)}{n}.$$

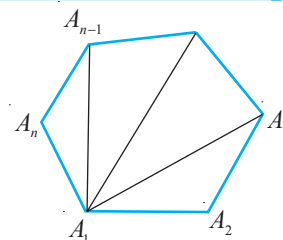


Рис. 9.13

Определения

- Выпуклый многоугольник называется **вписанным в окружность**, если все его вершины лежат на этой окружности.
- Многоугольник называется **вписываемым**, если около него можно описать окружность.
- Выпуклый многоугольник называется **описанным около окружности**, если все его стороны касаются этой окружности.
- Многоугольник называется **описываемым**, если в него можно вписать окружность.

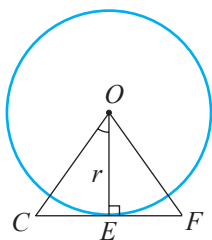


Рис. 9.17

2. Выразим длину a_n стороны правильного n -угольника через радиус r окружности, вписанной в этот многоугольник.

Решение:

В $\triangle OCE$ имеем: $m(\angle EOC) = \frac{\alpha_n}{2} = \frac{180^\circ}{n}$ (рис. 9.17).

$a_n = CF = 2CE = 2r \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$. В частности,

$$a_3 = 2r \operatorname{tg} 60^\circ = 2r\sqrt{3}, \quad a_4 = 2r \operatorname{tg} 45^\circ = 2r, \quad a_6 = 2r \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{2r}{\sqrt{3}} = \frac{2r\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ: $a_n = 2r \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$.

Правильные многоугольники (и не только) используются при изготовлении элементов мощения.

В повседневной жизни **мощение** – это процесс покрытия плиткой улицы, тротуара, двора и т. п. Другими словами, некая территория покрывается сравнительно мелкими элементами, форма которых более или менее правильная. Эти элементы называют плитками. Тротуарная плитка – это результат мощения.

В математике мощение представляет собой покрытие плоской поверхности с использованием одной или нескольких плоских геометрических фигур, называемых плитками, без перекрытий и без зазоров.

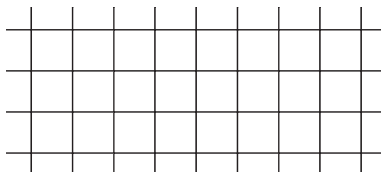
Покрывтия могут быть периодическими и непериодическими, регулярными или полурегулярными.

Периодические покрытия имеют повторяющийся рисунок, непериодические – нет.

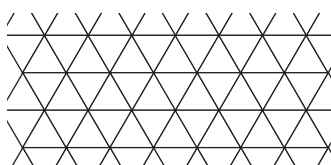
Регулярные покрытия состоят из правильных многоугольных плиток одинаковой формы, в то время, как полурегулярные покрытия состоят из правильных плиток разных форм.

На рисунке представлены *регулярные покрытия*: а) квадраты; б) равносторонние треугольники; в) правильные шестиугольники; а также *полурегулярное покрытие* г) с правильными шестиугольниками, квадратами и равносторонними треугольниками.

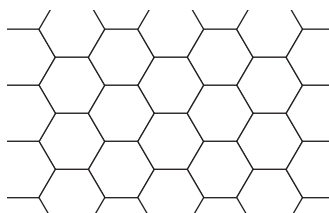
а)



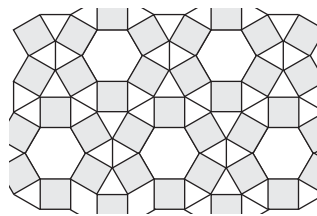
б)



в)



г)



Задачи



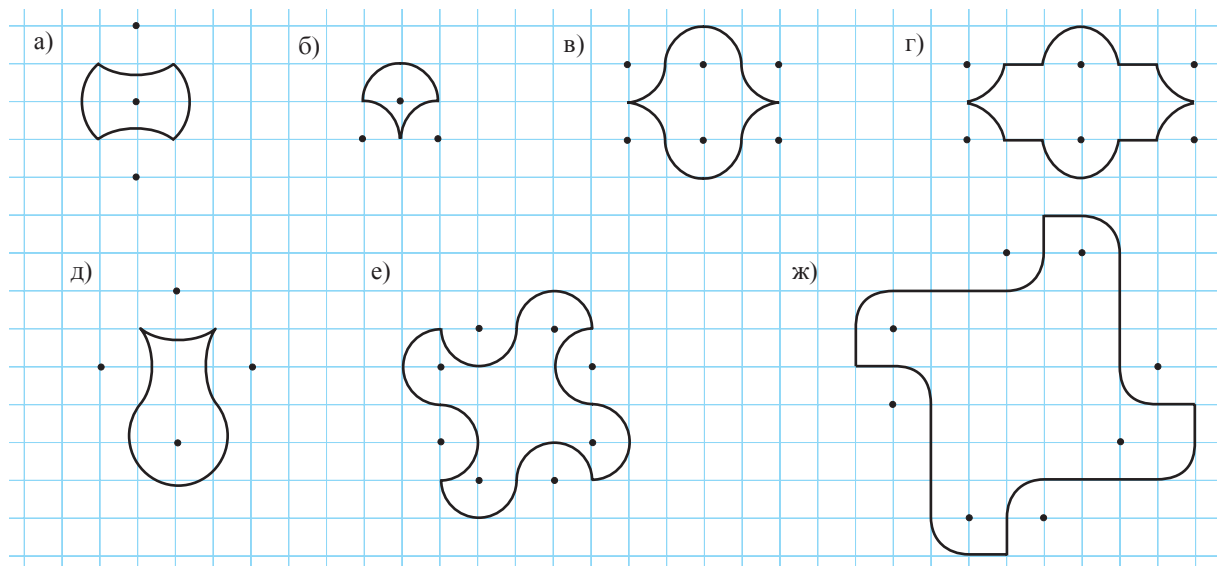
Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт

А

1. Сколько сторон имеет правильный многоугольник, каждый из внутренних углов которого равен:
а) 150° ; б) 160° ?
2. Сколько сторон имеет правильный многоугольник, каждый из внешних углов которого равен:
а) 36° ; б) 24° ?

В

3. Выразите радиус окружности, вписанной в равносторонний треугольник, через радиус описанной около него окружности.
4. Изобразите на бумаге эскиз дорожного покрытия для каждой из указанных плиток.



5. Приведите примеры (используя интернет) дорожных покрытий в разных странах. Определите, какие виды геометрических фигур были использованы.

С

6. **Работайте в парах!** Сторона равностороннего треугольника, вписанного в окружность, равна a . Найдите сторону квадрата, вписанного в эту окружность.

Реальный профиль

А₁

1. Сторона правильного n -угольника равна a_n . Выразите радиус R и апофему r этого многоугольника через a_n и n .
2. В окружности радиуса 1 м вписан правильный n -угольник. Найдите периметр P_n этого многоугольника при $n \in \{3, 4, 6, 8, 12\}$.

В₁

3. Квадрат и равносторонний треугольник вписаны в окружность радиуса 1 м так, что одна сторона треугольника параллельна стороне квадрата. Вычислите площадь общей части квадрата и треугольника.

С₁

4. **Работайте в парах!** В окружность, радиус которой равен 4 м, вписан равносторонний треугольник, а на его стороне построен квадрат. Найдите радиус окружности, описанной около квадрата.
5. Опишите около окружности равносторонний треугольник, квадрат, правильный восьмиугольник.

§3 Площади плоских фигур

определение

Каждой плоской фигуре ставится в соответствие действительное неотрицательное число, которое называется **площадью** данной фигуры.

Площадь удовлетворяет следующим условиям:

- 1° конгруэнтные фигуры имеют равные площади;
- 2° если фигура является объединением двух непересекающихся фигур, то ее площадь равна сумме площадей этих двух фигур;
- 3° квадрат, длина стороны которого равна единице, имеет площадь, равную единице.

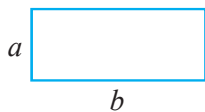


Рис. 9.18

Следуя этому определению, можно доказать, что площадь прямоугольника (рис. 9.18) равна произведению длин двух смежных сторон: $\mathcal{A} = a \cdot b$.

Формулы вычисления площадей некоторых плоских фигур приведены в таблице 1.

Таблица 1

№	Фигура	Геометрическое изображение	Формула
1	Квадрат		$\mathcal{A} = a^2 = \frac{1}{2}d^2$
2	Параллелограмм		$\mathcal{A} = bh = ab \sin \alpha = \frac{1}{2}d_1d_2 \sin \varphi$
3	Треугольник		$\mathcal{A} = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}bc \sin \alpha = pr = \frac{abc}{4R} =$ $= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$ где $p = \frac{a+b+c}{2}$, r – радиус окружности, вписанной в $\triangle ABC$, R – радиус окружности, описанной около ABC.
4	Трапеция		$\mathcal{A} = \frac{a+b}{2}h$
5	Выпуклый четырехугольник		$\mathcal{A} = \frac{1}{2}d_1d_2 \sin \varphi$
6	Правильные многоугольники		$\mathcal{A} = \frac{ar}{2}n = pr$, где $p = \frac{an}{2}$, p – полупериметр, n – число сторон правильного n -угольника, r – радиус окружности, вписанной в правильный n -угольник.
7	Круг		$\mathcal{A} = \pi R^2$
8	Сектор круга		$\mathcal{A} = \frac{1}{2}R^2\alpha \quad (\alpha \text{ в радианах})$ $\mathcal{A} = \pi R^2 \frac{\alpha}{360^\circ} \quad (\alpha \text{ в градусах})$



**Задания
с решением**

1. Точка касания окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, делит гипотенузу на отрезки длиной m и n . Найдите площадь треугольника (рис. 9.19).

Решение:

По теореме Пифагора,

$$\begin{aligned}(r+m)^2 + (r+n)^2 &= (m+n)^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow 2r^2 + 2r(m+n) + m^2 + n^2 &= m^2 + n^2 + 2mn \Rightarrow \\ \Rightarrow r^2 + r(m+n) &= mn.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Тогда, } S_{ABC} &= \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} (r+m)(r+n) = \\ &= \frac{1}{2} (r^2 + r(m+n) + mn) = \frac{1}{2} (mn + mn) = mn \text{ (и.п.).}\end{aligned}$$

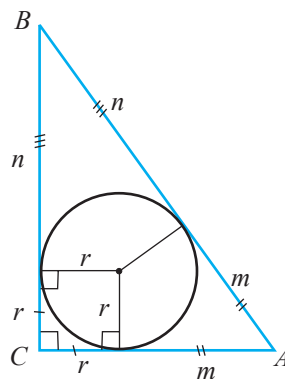


Рис. 9.19

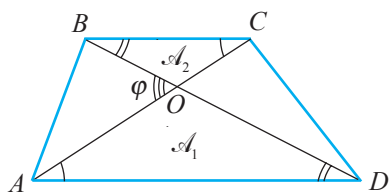


Рис. 9.20

2. Трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$) разбита диагоналями на четыре треугольника с общей вершиной O . Найдите площадь трапеции, если известно, что площади треугольников AOD и BOC равны S_1 и S_2 соответственно (рис. 9.20).

Решение:

Так как $\triangle AOD \sim \triangle COB$, то

$$\frac{BC}{AD} = \frac{CO}{AO} = \frac{OB}{OD} = \sqrt{\frac{S_2}{S_1}} \text{ (подобие с коэффициентом } \sqrt{\frac{S_2}{S_1}} \text{).}$$

Пусть $m(\angle AOB) = \varphi$.

$$\text{Тогда: } CO \cdot OD = AO \cdot OB \Rightarrow S_{AOB} = \frac{1}{2} AO \cdot OB \sin \varphi = \frac{1}{2} CO \cdot OD \sin \varphi = S_{COD}.$$

$$\begin{aligned}\text{Из } OB &= \sqrt{\frac{S_2}{S_1}} \cdot OD \text{ получаем: } S_{AOB} = \frac{1}{2} AO \cdot OB \sin \varphi = \frac{1}{2} AO \cdot \sqrt{\frac{S_2}{S_1}} \cdot OD \sin \varphi = \\ &= \sqrt{\frac{S_2}{S_1}} \cdot \frac{1}{2} AO \cdot OD \cdot \sin(180^\circ - \varphi) = \sqrt{\frac{S_2}{S_1}} \cdot S_1 = \sqrt{S_1 \cdot S_2}.\end{aligned}$$

$$\text{Следовательно, } S_{ABCD} = S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_1 \cdot S_2} = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2.$$

Задачи



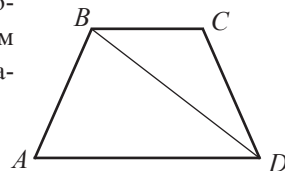
Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт

A

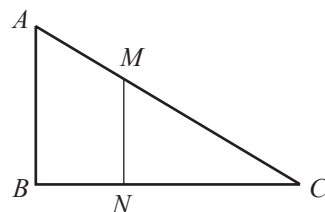
- Длины катетов прямоугольного треугольника относятся как 3:4, а длина гипотенузы равна 50 см. Найдите площадь треугольника.
- Точка касания окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, делит гипотенузу на отрезки длиной 5 см и 12 см. Найдите площадь треугольника.

B

- Найдите площадь равностороннего треугольника со стороной $4\sqrt{3}$ см.
- Диагонали ромба равны 8 см и 15 см. Найдите его площадь.
- Периметр параллелограмма равен 72 см. Длины его сторон относятся как 5:7, а величина острого угла равна 30° . Найдите площадь параллелограмма.
- (ЕГЭ 2019) В равнобедренной трапеции $ABCD$ основания AD и BC равны 16 см и 8 см соответственно, а диагональ равна 15 см. Найдите площадь трапеции.



7. (ЕАК 2015) Сторона ромба равна 20 см, а длины его диагоналей относятся как 3:4. Найдите площадь ромба.
8. (ЕАК 2022) Пусть ABC – прямоугольный треугольник, в котором $m(\angle ABC) = 90^\circ$, $AB = 9$ см, $AC = 15$ см. На сторонах AC и BC рассмотрим точки M и N соответственно, такие, что $MN \parallel AB$ и $BN : NC = 1 : 2$. Найдите площадь трапеции $ABNM$.



С

9.  **Работайте в парах!** Диагонали равнобедренной трапеции перпендикулярны, а длина средней линии равна 12 см. Найдите площадь трапеции.
10. Из точки A окружности проведены хорды AB и AC так, что $AB = AC = 2\sqrt{3}$ см и $m(\angle BAC) = 60^\circ$. Найдите площадь круга, ограниченного этой окружностью.
11. Вычислите площадь каждой из плиток из задачи В 4, с. 205, где площадь одной клеточки равна 1 кв.ед.



Работайте в группах!

12.  **Практическая работа.** Измерение периметров и площадей фигур во дворе школы
13.  **Проект STEAM.** Модели мощения

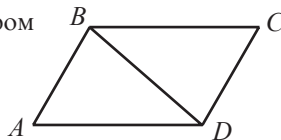
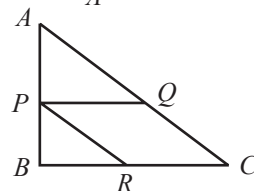
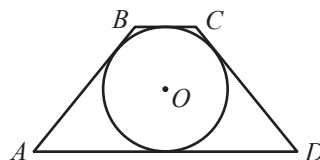
Реальный профиль

А₁

1. Найдите площадь ромба, если длина его стороны равна a , а сумма длин диагоналей равна d .
2. Диагональ равнобедренной трапеции является биссектрисой тупого угла. Найдите площадь трапеции, если его периметр равен 22 см, а длина большего основания равна 6 см.
3. Дан прямоугольный треугольник ABC , у которого $AB = 5$ м, $AC = 3$ м, $BC = 4$ м и $[AD]$ – биссектриса. Найдите площади треугольников ACD и ADB .

В₁

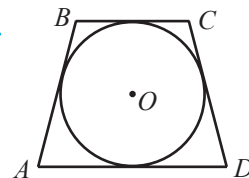
4.  **Работайте в парах!** Средняя линия равнобедренной трапеции длиной 10 м делит трапецию на две фигуры, площади которых относятся как 2:3. Найдите площадь трапеции, если в нее можно вписать окружность.
5. (ЕАК 2011) Клумба имеет форму равнобедренной трапеции, в которой цветы посажены только на круге, вписанном в эту трапецию (см. рисунок). Меньшее основание трапеции равно 1 м. Вычислите площадь круга, если известно, что длина малого основания трапеции равна радиусу круга.
6. (ЕАК 2022) Дан прямоугольный треугольник ABC , в котором $m(\angle ABC) = 90^\circ$, а $BC = 36$ см. На сторонах AB , AC и BC находятся точки P , Q и R соответственно, так, что $PQCR$ является ромбом со стороной 20 см. Найдите площадь треугольника APQ .
7. (ЕАК 2021) Дан параллелограмм $ABCD$, в котором $m(\angle A) = 60^\circ$, $AB = 4$ см, $BD = 2\sqrt{7}$ см. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.



8. Основание высоты параллелограмма $ABCD$, проведенной из вершины B , делит сторону AD пополам. Периметр параллелограмма равен 24 см, а периметр треугольника ABD равен 18 см. Найдите площадь параллелограмма.
9. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ перпендикулярны и равны a и b . Найдите площадь четырехугольника $EFGH$, где E , F , G и H – середины сторон AB , BC , CD и DA соответственно.

C₁

10. (ЕГЭ 2024, предтестирование) В равнобедренную трапецию $ABCD$ с основаниями $BC = 6$ см и $AD = 10$ см. Найдите длину стороны AB .



11. Точка M является серединой стороны BC параллелограмма $ABCD$. Прямая AM пересекает диагональ BD в точке E . Найдите площади треугольников ABE и AED , если площадь треугольника BEM равна 1.
12. Одна из диагоналей прямоугольной трапеции равна d и делит трапецию на два равнобедренных прямоугольных треугольника. Найдите площадь трапеции.
13. Центр круга, вписанного в прямоугольную трапецию, отстоит от концов боковой стороны на 1 дм и 2 дм. Найдите площадь трапеции.

**Работайте в группах!**

14. ○ **Практическая работа.** Измерение периметров и площадей фигур во дворе школы
15. ○ **Проект STEAM.** Модели мощения

Задачи на повторение

*Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт*

A

1. Найдите отношение между длиной радиуса вписанной в прямоугольный равнобедренный треугольник окружности и высотой, опущенной на гипотенузу.
2.  **Работайте в парах!** Две вершины квадрата лежат на окружности радиуса 17 см, а остальные две расположены на касательной к этой окружности. Найдите длину диагонали квадрата.
3. Высота, опущенная из вершины тупого угла ромба, делит его сторону пополам. Найдите величины углов ромба.

B

4. Общая хорда двух окружностей с конгруэнтными радиусами равна 12 см и является диагональю вписанного ромба в пересечении этих окружностей. Длина второй диагонали ромба равна 6 см. Найдите длины радиусов окружностей.
5. В ромб, один из углов которого равен 30° , вписана окружность, а в нее вписан квадрат. Найдите отношение между площадью ромба и площадью квадрата.
6. Соответствующие стороны параллелограмма и прямоугольника конгруэнтны. Площадь параллелограмма в два раза меньше площади прямоугольника. Найдите величину тупого угла параллелограмма.
7. Длины оснований равнобокой трапеции равны 5 см и 12 см, а длина боковой стороны – 12,5 см. Найдите высоту трапеции.
8. Продолжения боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке E . Известно, что $AB = 2$ см, $BE = 4$ см, $EC = 6$ см. Найдите CD .
9. Сумма величин углов при большем основании трапеции равна 90° . Длина большего основания равна 20 см, а меньшего – 4 см. Найдите расстояние между серединами оснований.
10. (ЕГЭ 2017) В равнобедренной трапеции длина большего основания равна 22 см, а меньшее основание конгруэнтно боковой стороне и имеет длину 10 см. Найдите длину диагонали трапеции.
11. (ЕГЭ 2016) В прямоугольном треугольнике ABC длины катетов AB и AC равны 3 см и 6 см соответственно. На сторонах AB , BC и AC взяты точки M , N и P соответственно так, что $AMNP$ является квадратом. Найдите длину диагонали квадрата $AMNP$.

12. (ЕАН 2023) Тупой угол ромба равен 120° . Найдите длину большей диагонали ромба, если периметр ромба равен 40 см.
13. (ЕАН 2024) Площадь равнобедренного треугольника ABC с основанием AC равна 60 см^2 . Точки M и N являются серединами сторон AB и BC соответственно. Найдите периметр треугольника ABC , если $MN = 5 \text{ см}$.

С

14. Проекция диагонали равнобокой трапеции на большее основание равна 7 см, а ее высота – 4 см. Найдите площадь трапеции.
15. Расстояние от центра окружности радиусом 13 см до одной хорды равно 5 см. Найдите длину хорды.

16.  **Работайте в группах!**  **Проект STREAM.** Молдавский ковер

Реальный профиль

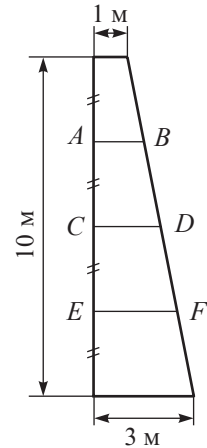
А₁

1. Длина радиуса вписанной в прямоугольный треугольник окружности равна r , а длина радиуса окружности, описанной около этого треугольника, равна R . Найдите площадь треугольника.
2. Прямоугольный треугольник ABC разделен высотой CD , проведенной из вершины прямого угла на два треугольника: BCD и ACD . Радиусы вписанных окружностей в эти треугольники равны 4 см и 3 см соответственно. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC .
3. Треугольник ABC прямоугольный. Окружность, центр которой лежит на катете AC , касается гипотенузы AB и пересекает катет BC в точке D так, что $BD : DC = 2 : 3$. Известно, что $AC : BC = 12 : 5$. Найдите отношение между длиной радиуса окружности и длиной катета BC .

В₁

4. Медианы AA_1 и BB_1 равнобедренного треугольника ABC ($CA = CB$) пересекаются в точке M . Отношение между радиусом окружности, вписанной в треугольник AMB , и радиусом окружности, вписанной в четырехугольник MB_1CA_1 , равно $\frac{3}{4}$. Найдите отношение $CB : AB$.
5. (ЕАН 2016) Дана равнобедренная трапеция $ABCD$, в которой $AD \parallel BC$, $AD = 6 \text{ см}$, $CD = 2 \text{ см}$ и $BC = 5 \text{ см}$. Несущие прямые сторон AB и CD пересекаются в точке M . Найдите длину высоты треугольника AMD , проведенной к стороне AD .
6. (ЕАН 2015) Длина стороны ромба равна 10 см, а его высота равна 8 см. Найдите длину меньшей диагонали ромба.
7. (ЕАН 2014) Величина острого угла прямоугольного треугольника равна 30° , а длина наибольшего катета равна $5\sqrt{3} \text{ см}$. Найдите площадь круга, ограниченного окружностью, описанной около данного треугольника.
8. (ЕАН 2018) В остроугольном равнобедренном треугольнике ABC , где $AB = BC$ и длина высоты AK равна 6 см. Найдите периметр треугольника ABC , если его площадь составляет 30 см^2 .
9. (ЕАН 2017) Дан прямоугольный треугольник ABC , в котором $m(\angle B) = 90^\circ$ и $AB = 6 \text{ см}$. Длина медианы BM равна 5 см. Найдите площадь треугольника ABC .
10. Основания трапеции равны a и b ($a > b$). Найдите длину отрезка, соединяющего середины диагоналей.
11. Основания трапеции равны a и b . Прямая, параллельная основаниям, делит трапецию на две трапеции с равными площадями. Найдите длину отрезка этой прямой, заключенного между боковыми сторонами.
12. Определите величины острых углов прямоугольного треугольника, если отношение радиусов вписанной и описанной окружностей равно $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

13. У квадратного листа со стороной a вырезаются углы так, чтобы получилась правильная восьмиугольная деталь. Найдите длину стороны восьмиугольника.
14. Металлический столб имеет форму и размеры, как показано на рисунке. Найдите длины горизонтальных балок AB , CD , EF .



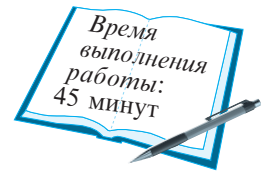
C₁

- 15*. Рассматривается множество прямоугольных треугольников одинаковой площади $\mathcal{A}$. Найдите из этого множества те треугольники, у которых описанные окружности имеют минимальные площади.
- 16*. Из множества всех треугольников, у которых одна сторона общая и противолежащие этой стороне углы равны α , найдите треугольник наибольшего периметра.

17.  **Работайте в группах!** ○ Проект STREAM. Молдавский ковер

Итоговый тест

Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт



1. Два круга одинакового радиуса 5 см пересекаются. Площадь объединения этих кругов равна 44π см².
а) Найдите истинностное значение высказывания:
„Площадь круга вычисляется по формуле $\mathcal{A} = 2\pi R$, где R – радиус круга”.
б) Найдите площадь пересечения этих кругов.
2. Длины сторон прямоугольника относятся как 3:2, а его площадь равна 96 см². Найдите длину большей стороны прямоугольника.
3. Найдите длины боковых сторон и диагоналей трапеции, вписанной в окружность радиуса 37,5 см, если длина меньшего основания трапеции равна 51 см, а большее основание является диаметром окружности.
4. В ромб с острым углом в 30° вписана окружность радиуса 6 см. Найдите площадь ромба.

н/п

Реальный профиль

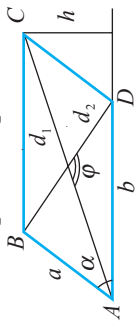
1. Дан параллелограмм $ABCD$, у которого $AD = 3$ см, $AB = 4$ см, $m(\angle DAB) = 60^\circ$. На сторонах AB и CB вне параллелограмма построены равносторонние треугольники ABE и CBF .
а) Найдите истинностное значение высказывания:
„Формула $\mathcal{A} = \frac{1}{2}ab \sin \alpha$ является одной из формул, по которой вычисляется площадь параллелограмма”.
б) Найдите площадь треугольника DEF .
2. Докажите, что сумма расстояний от любой точки, взятой на стороне равностороннего треугольника, до двух других сторон – постоянная величина.
3. Основания трапеции равны 4 см и 16 см. Найдите радиусы окружностей, вписанной в трапецию и описанной около нее.
4. В круге радиусом R построены две параллельные хорды так, что центр лежит между этими хордами. Одна из хорд стягивает дугу величиной 90° , а другая – дугу величиной 60° . Найдите площадь части круга, заключенной между хордами.

н/п

Четырехугольники. Многоугольники

Четырехугольники

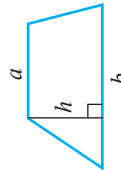
Параллелограмм



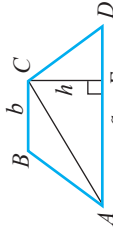
$$S = bh = ab \sin \alpha = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi$$

$$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$$

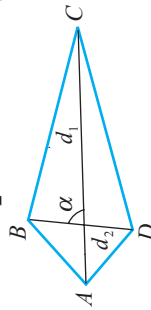
Равнобедренная трапеция



$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$$



$$AE = \frac{a+b}{2}, ED = \frac{a-b}{2}$$



$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \alpha$$

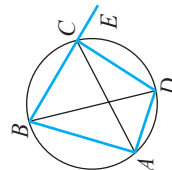
Вписанные четырехугольники

$$m(\angle ABC) + m(\angle CDA) = 180^\circ =$$

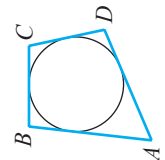
$$= m(\angle BAD) + m(\angle BCD)$$

$$\angle ABD \equiv \angle ACD$$

$$\angle DCE \equiv \angle DAB$$



Описанные четырехугольники



$$BC + AD = CD + AB$$

Многоугольники

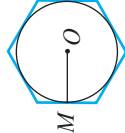
Выпуклый многоугольник



Невыпуклый многоугольник

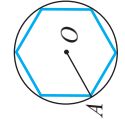


Вписываемый многоугольник



$$OM = R$$

Описываемый многоугольник

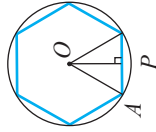


$$OA = R$$

Правильный многоугольник

$$a_n = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}$$

R – радиус окружности, описанной правильному многоугольнику.
 $OA = R$

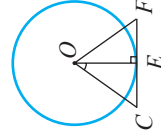


$[OP]$ – апофема правильного многоугольника.

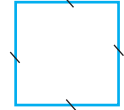
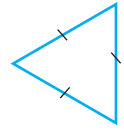
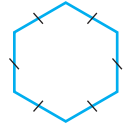
$$a_n = 2r \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$$

r – радиус окружности, вписанной в правильный многоугольник.

$CF = a_n$ – сторона правильного многоугольника.



Правильные многоугольники



Ответы и указания

Модуль 1. Действительные числа. Повторение и дополнения

Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт. А. 1. а) 0,75; б) 0,2(6); в) 0,6; г) 0,125; д) 0,08; е) 0,008; ж) 0,1(6); з) 0,(1). 2. а) $\frac{13}{99}$; б) $\frac{23}{9}$; в) $\frac{11}{9}$; г) $\frac{23}{99}$; д) $\frac{23}{18}$; е) $\frac{271}{990}$. 3. а) Иррациональное; б), в), г) рациональное. 4. 4. 5. >. 6. а) Л; б), в) И. 7. 49. 8. Да. 9. 108. 10. 625 кг. **В.** 11. а) $(-6, +\infty)$; б) $(-\infty, \frac{5}{9})$. 12. а) 8°C ; б) $\frac{109}{11} \approx 10^\circ\text{C}$. 13. а) $\sqrt{11+4\sqrt{6}} > \sqrt{6+5\sqrt{7}}$; б) $\sqrt{19+8\sqrt{3}} > \sqrt{14+6\sqrt{5}}$. 14. $4\sqrt{3}$. 15. а) Да; б) возможно; в) нет. 16. $\sqrt{2,4} \approx 1,55$ (И). 17. $\frac{21}{25}$. 18. 16. 19. а) 480 леев; б) 320 леев. 20. 5 618 д. ед. 21. $9-1,8\sqrt{10}$. 23. б) 74 д. ед. 24. 40 мест. 25. 12. 26. 288 леев. **С.** 27*. 0,6271105. 28. $a=15$, $b=33$, $c=27$.

Итоговый тест. Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт. 1. С. 2. С. 3. $5\sqrt{3} < 4\sqrt{5}$. 4. Л. 6. 18 м.

Модуль 2. Элементы математической логики и теории множеств

§1. Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт. А. 1. а) $A = \{4t | t \in \mathbb{N}, 0 \leq t \leq 12\}$; б) $\text{card}A = 13$. 2. а) $X = \{a, e, i, m, n, r, t\}$; в) $\text{card}X = 7$. 3. Например, $A = \{0, 2, 3, 4, 5\}$. Существует 6 таких множеств. 4. а) $A \neq B$, $A \cup B = (-\infty, 1]$, $A \cap B = \{-3\}$; б) $A \neq B$, $A \cup B = (1, \infty)$, $A \cap B = \emptyset$. 5. б) $\{1, 2, 3\}$; г) $\{4, 5\}$. 6. Существует 15 подмножеств. 7. а) Да; б) нет. 8. а) $\mathbb{N}$; б) A ; в) $\emptyset$; г) $\{6, 7, 8, \dots\}$. 9. Например, $\{1, 2, 3, 4\} \subseteq A$; $\text{card}B(A) = 32$. **В.** 10. а) Например, $-3, -2, -1$; б) например, $0, \pm 1$. 11. а) $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$; б) $\mathbb{R}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; в) $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$. **С.** 12. а) $A \times B = \{(2, 1), (2, 3), (4, 1), (4, 3), (6, 1), (6, 3)\}$. Да. б) $\{(a, x), (a, y), \dots, (c, z)\}$. 13. $x=4$, $A=B=\{3, 11, 13\}$.

§1. Реальный профиль. А. 1. Да. 2. а) $(-1, 3)$; б) $(-\infty, -6] \cup [6, +\infty)$; в) $\mathbb{R}$; г) $(-6, -1] \cup [3, 6)$. 3. $\text{card}A = 4$, $\text{card}B(A) = 16$. **В.** 4. а) Множество иррациональных чисел; б) $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. 5. а) $\mathbb{R}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; б) $\mathbb{R}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; в) $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$. **С.** 7*. а) $\mathbb{R} \setminus \{2\}$; б) $\mathbb{R}_-$. 8*. а) Л; б) Л.

§2. Реальный профиль. А. 1. а) Л; б) не является высказыванием; в) И. 2. г) Л. 3. а) 20:10, значит 20:5. 4. а) „ ABC – треугольник“ – разъяснительная часть, „ ABC – прямоугольный треугольник“ – условие, „квадрат длины гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов длин его катетов“ – заключение; б) „угол α – внутренний угол треугольника ABC “ – разъяснительная часть, „треугольник ABC – равно-сторонний“ – условие, „величина угла α равна 60° “ – заключение. **В.** 5. а) И; б) Л. 7. „Если диагонали четырехугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны, то четырехугольник является ромбом“ – Л. 9. „Если сумма $a+b$ – рациональное число, то числа a, b – рациональные“ – Л. **С.** 11*. а), б) Л.

Упражнения и задачи на повторение

Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт. А. 1. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 9\}$, $A \cap B = \{1, 3\}$, $A \setminus B = \{2, 4\}$, $B \setminus A = \{5, 9\}$, $A \times B = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (1, 9), (2, 1), (2, 3), \dots, (4, 5), (4, 9)\}$. 2. а), б), в), ж) И; г), д), е), з) Л. **В.** 3. $A \cup B = (-3, +\infty)$; $A \cap B = \{-1, 5\}$. 4. а) $S_1 \cup S_2 = \{\pm 1, 6\}$; б) $S_1 \cap S_2 = \{-1, 6\}$; в) $S_1 \setminus S_2 = \emptyset$; г) $S_2 \setminus S_1 = \{1\}$. **С.** 5. 32 подмножества: $\emptyset, \{-2\}, \{-1\}, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{-2, -1\}, \dots, \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

Реальный профиль. А. 1. 4 учащихся. 3. а) „число a делится на 14“ – достаточное условие, „число a делится на 7“ – необходимое условие; „Если целое число a делится на 7, то оно также делится на 14“ – Л; б) „исследуемый треугольник является прямоугольным“ – достаточное условие, „исследуемый треугольник имеет два острых угла“ – необходимое условие; „Если у треугольника два угла острые, то он является прямоугольным“ – Л. **В.** 4. а) $(-7; 6]$; б) $[-6; 1]$; в) $(-7; -6)$; г) $[1, 6]$. 5. а) И; б) Л. 6. И. **С.** 7. а), б) И.

Итоговый тест. Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт. 1. Л. 2. а) M_3 ; б) M_1 ; в) M_5 . 3. а) $S_1 \cup S_2 = \{1, \pm 3\}$; б) $S_1 \cap S_2 = \{1\}$; в) $S_2 \setminus S_1 = \{3\}$; г) $S_1 \setminus S_2 = \{-3\}$. 4. 2^{16} .

Реальный профиль. А. 1. а) $\text{card}B(A) = 2^3$; $\text{card}B(B) = 2^2$; б) $\text{card}C = 6$. 2. Ф. 4. а) „Четырехугольник является ромбом“ – достаточное условие, „В ромб можно вписать окружность“ – необходимое условие; б) „Если в четырехугольник можно вписать окружность, то он является ромбом“ – Л.

Модуль 3. Корни. Степени. Логарифмы

§1. Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт. А. 1. а) 0,05; б) 288; в) $\frac{90}{161}$; г) $2-\sqrt{3}$; д) $\sqrt{3}-2$; е) $3-\sqrt{3}$. **В.** 2. а) $2\sqrt{2}$; б) $5\sqrt{2}$; в) $4a^2b\sqrt{2b}$; г) $-5ab\sqrt{b}$; д) $|x+3|$; е) xy^2 ; ж) $-13yx\sqrt{x}$; з) $-2a^2b^3\sqrt{2a}$. 3. а) $\sqrt{12}$; б) $-\sqrt{27}$; в) $\sqrt{3b^2}$; г) $-\sqrt{-2x}$; д) $\sqrt{7c^2a}$, если $c \leq 0$; $-\sqrt{7c^2a}$, если $c > 0$; е) $\sqrt[3]{2x^3y}$; ж) $\sqrt{2a^3}$; з) $\sqrt{3a^2}$; и) $\sqrt{3y^2}$.

если $y > 0$, и $-\sqrt{3y^2}$, если $y < 0$; к) $\sqrt{2x}$; л) $\sqrt[3]{2x^4y}$; м) $-\sqrt{-x^3}$. 4. а) 34; б) $8\sqrt{3}$; в) $\sqrt{\frac{2}{5}}$; г) $8(9+4\sqrt{5})$; е) $\sqrt{3}-1$.
С. 5. а) $\frac{2\sqrt{5}+\sqrt{7}}{13}$; б) $\frac{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}}{3}$; в) $-\sqrt{13}-\sqrt{18}$; г) $-\frac{1}{4}(4+3\sqrt{2}-2\sqrt{7}-\sqrt{14})$. 6. а) $3\sqrt[3]{5} < 5\sqrt[3]{3}$; б) $3\sqrt[3]{4} < 4\sqrt[3]{2}$.

§1. Реальный профиль. А. 1. 2. 2. 1; 2. 3. а) $\sqrt{3}-4$; б) $\frac{13}{12}$; в) -1 . **В.** 4. 5. 5. а) 3; б) 5. 7. 5 граней. **С.** 8. а) 7.

§2. Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт. А. 1. а) $\frac{7}{3}$; б) $\frac{10^5}{3}$; в) $\frac{125}{2}$; г) 0; д) $\left(\frac{5}{2}\right)^4$; е) 9. 2. 2а.
 3. -4. **В.** 4. а) $\frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$; б) $\frac{\sqrt{x}+2}{2\sqrt{x}}$; в) $a^{\frac{1}{4}}-2$; г) $\frac{b+a}{b-a}$. 5. а) Меньше 1; б), в) больше 1. 6. 12%. **С.** 7. $\frac{10^{20}}{16\sqrt{2}}$

кубиков. 8. $15^{\frac{2}{7}}$ см.

§2. Реальный профиль. А. 1. а) 5; б) $\frac{3}{2}$; в) 7200; г) $\frac{1}{4} \cdot 5^{15}$. 2. $n+1$. 3. 2. 4. 0. **В.** 5. а) $\frac{b^{\frac{2}{3}}}{a+b}$; б) $\frac{1}{\sqrt{x}}$; в) $\frac{x+3y}{x-y}$; г) -1 ; д) 7^{-5} ; е) $3^{\sqrt{3}} \cdot 5^{30\sqrt{3}}$. 6. а), б) Больше 1; в), г), д) меньше 1.

С. 8. $\mathbb{R}_+$. 9. $\frac{m^3}{m-\sqrt[3]{2}}$, если $\begin{cases} m > 1 \\ m \neq \sqrt[3]{2} \end{cases}$; $-(m^2+m\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})$, если $m \leq 1, m \neq 0$.

§3. Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт. А. 1. а) 9; б) 2; в) 1; г) 2; д) 144; е) 0. 2. -2. 3. 15.
 4. 2. **В.** 5. $\frac{1}{2}$. 6. 16. 8. 2. 9. $3a+ab$. **С.** 10. $1 < \log_2 3 < \log_2 5$.

§3. Реальный профиль. А. 1. „=“. 2. „<“. 3. „<“. 4. а) $\log_2 |a|$; б) $4\log_a |b|$; в) $\log_a b$; г) 3; д) $3-2\log_a b$, если $3-\log_a b \geq 0$; -3 , если $3-\log_a b < 0$; е) $|a+1|$. **В.** 5. $x=5^{\frac{1}{4}}$. 6. 8. 7. 1. 8. а) $3(1-a-b)$; б) $\frac{1+ab}{a(8-5b)}$. Указание. Разложите числа на простые множители. **С.** 11. 0.

Упражнения и задачи на повторение

Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт. А. 1. а) 4; б) 2; в) 1,5; г) 7200; д) -1 . 2. а) И; б), в), г) — Л.
 3. а) -2 ; б) $2^{\frac{5}{4}}$. 4. 5. **В.** 5. а) $-2x$; б) 1. 6. а) $\sqrt{24} > \sqrt[3]{27}$; б) $(\sqrt{5})^{16} < \left(\frac{1}{5}\right)^{-10}$. 7. а) $\sqrt{6}-\sqrt{3}$; б) $\frac{1}{2}(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{25})$; в) $-\frac{1}{6}(1+2\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{10})$. **С.** 8. 2 м.

Реальный профиль. А. 1. <. 2. >. **В.** 4. а) Л; б) И. 5. а) $\frac{7}{4}$; б) 6; в) $\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt[3]{b}}$; г) $\log_6(a^3-2)^2$. 6. а), д) Первое меньше; б), г) первое больше; в) =. **С.** 7. $a \in \mathbb{R}_+$. 8. а) $\frac{3(1-a)}{a}$; б) $3(1-a-b)$. 9. $n=3$.

Итоговый тест. Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт. 1. В. 2. $3\sqrt{7} < 7\sqrt{3}$. 3. а) Л; б) И.
 4. $7\sqrt{2}(\sqrt{7}-\sqrt{5})$. 5. В.

Реальный профиль. 1. А. 2. $(\sqrt[3]{4})^{\frac{1}{3}} > (\sqrt[3]{2})^{\frac{1}{4}}$. 3. $-(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}})$. 4. В. 5. -10^{-1} . 6. $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \left\{ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\}$, a^2+a+1 .

Модуль 4. Геометрические фигуры на плоскости. Треугольники. Окружность.

Повторение и дополнения

§1. Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт. А. 4. а), б), в) И; г) Л.

§1. Реальный профиль. А. 1. а) $1 \Rightarrow 2$ (Л), $1 \Rightarrow 3$ (И), $1 \Rightarrow 4$ (И); б) $2 \Rightarrow 1$ (Л), $3 \Rightarrow 1$ (И), $4 \Rightarrow 1$ (Л).

В. 2. а) $a \cap b = \{A\}$, $a \cap P = a$, $b \cup P = P$; б) P , $\{A\}$.

§2. Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт. А. 1. 40 см. 2. 12 см. 3. 50° или 130° . **В.** 4. 18 см.
 5. 50. 6. 7. 7. 65. 8. 130° . 9. 40° . **С.** 10. 16 см.

§2. Реальный профиль. А. 1. Указание. Середина гипотенузы — центр окружности, описывающей треугольник.
 2. Указание. Рассмотрим два подобных равнобедренных треугольника с вершинами в центрах окружностей.
 3. Указание. $\angle BCA \equiv \angle ADE$. 4. 60° . 5. 60° . **В.** 6. Указание. $m(\angle CBD) = \pi - m(\angle BDA) - m(\angle BCA)$. Углы BDA и BCA вписаны в окружность и стягивают ее дуги, не зависящие от прямой CD . 7. Указание. Пусть T точка касания. Тогда, $CC_1 = C_1T$ и $BB_1 = B_1T$, откуда $AC_1 + C_1B_1 + B_1A = AC_1 + C_1T_1 + TB_1 + B_1A = AC_1 + C_1C + BB_1 + B_1A = AC + AB = 2AB$. 8. Указание. Общая касательная в точке A проходит через середину отрезка BC . 9. Указание. Покажите, что $m(\angle ABC) = m(\angle AA_2C)$, где A_2 — точка, противоположная точке A . 10. Указание. $CE^2 = CA \cdot CB = CD^2$.
С. 11. а) Указание. $m(\angle AA_1B) = m(\angle AB_1B)$; б) Указание. Из а) следует, что $m(\angle A_1B_1C) = m(\angle CBA)$. $\angle CBA$ конгру-

энтен углу, образованного прямой AC и касательной к окружности в вершине C . Значит, касательная параллельна прямой A_1B_1 . Тогда, $OC \perp A_1B_1$. 12. $2\sqrt{R \cdot r}$. 13. Указание. Постройте прямую CB такую, что $m(\angle ABC) = \varphi$, затем прямую $BD \perp CB$. Пересечение серединного перпендикуляра отрезка AB с BD есть точка O . Искомое множество – одна из дуг окружности $\mathcal{C}(O, OB)$, а также дуга, симметричная ей. 14. 6 см и 12 см. 15. 13 см.

§3. Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт. А. 1. 12 см. 2. 8 см. 3. 30 см. 4. 100 см. В. 5. 16 см, 16 см, 12 см. 6. 18 см, 18 см, 20 см. 7. 3 см. С. 9. $EF = FD = 3$ см.

§3. Реальный профиль. А₁. 1. а) Указание. Примените признак ГУ. б) Указание. Примените признак УСУ. в) Указание. Примените признак СУС. 2. 8 см. 3. Указание. Примените признак ГК. 4. 6 см. 5. Указание. Примените признак ГУ. 6. Указание. Примените признак СУС. В₁. 7. а) Указание. На $[AM]$ и $[A_1M_1]$ возьмите точки D и D_1 такие, что $AM = MD$ и $A_1M_1 = M_1D_1$. Из $\triangle AMC \equiv \triangle MBD$ и $\triangle A_1M_1C_1 \equiv \triangle M_1B_1D_1$ следует, что $\angle ABD \equiv \angle A_1B_1D_1 \Rightarrow \triangle ABD \equiv \triangle A_1B_1D_1$; б) $\triangle ALC \equiv \triangle A_1L_1C_1$. 8. $\triangle ABM \equiv \triangle A_1B_1M_1 \Rightarrow \angle ABC \equiv \angle A_1B_1C_1 \equiv \angle ABC \equiv \triangle A_1B_1C_1$. 9. Указание. На $[AM]$ и $[A_1M_1]$ возьмите точки D и соответственно D_1 такие, что $AM = MD$ и $A_1M_1 = M_1D_1$. $\triangle ABD \equiv \triangle A_1B_1D_1 \Rightarrow \angle BAM \equiv \angle B_1A_1M_1$, и $\triangle ADC \equiv \triangle A_1D_1C_1 \Rightarrow \angle MAC \equiv \angle M_1A_1C_1$. Таким образом, $\angle BAC \equiv \angle B_1A_1C_1 \Rightarrow \triangle ABC \equiv \triangle A_1B_1C_1$. 10. Указание. $\triangle AMC \equiv \triangle A_1M_1C_1 \Rightarrow AC = A_1C_1$; $\triangle AMB \equiv \triangle A_1M_1B_1 \Rightarrow AB = A_1B_1$. Значит, $\triangle ABC \equiv \triangle A_1B_1C_1$. С₁. 11. Указание. На медиане AM возьмите точку D такую, что $AM = MD$. $\triangle BMD \equiv \triangle AMC \Rightarrow BD = AC$, а в $\triangle ABD$ имеем: $AB + BD > AD$ или $AB + AC > 2AM$. 12. Указание. Из задачи 11 следует, что $2m_a < b + c$, $2m_b < a + c$, $2m_c < a + b$. Сложив эти неравенства, получим $m_a + m_b + m_c < \mathcal{P}$. Сложив неравенства $m_a > c - \frac{a}{2}$, $m_b > a - \frac{b}{2}$, $m_c > b - \frac{c}{2}$, получим: $m_a + m_b + m_c > \frac{1}{2}\mathcal{P}$. 14. Указание. $\triangle ABL \equiv \triangle A_1B_1L_1 \Rightarrow \angle ALC \equiv \angle A_1L_1C_1 \Rightarrow \triangle ALC \equiv \triangle A_1L_1C_1 \Rightarrow AC = A_1C_1 \Rightarrow \triangle ABC \equiv \triangle A_1B_1C_1$. 15. $\frac{2\mathcal{P} - \mathcal{P}}{2}$. 16. 15 см, 20 см, 25 см.

§4. Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт. А. 1. 2 см. 2. 36 см, 9 см. В. 3. 30 см, 40 см, 50 см. 4. 6 см. С. 5. 30 см, 36 см. 6. 7,2 м.

§4. Реальный профиль. А₁. 1. Указание. $2m(\angle B) = \pi - m(\angle A) = \pi - m(\angle A_1) = 2m(\angle B_1)$. Примените признак УСУ. 3. Указание. $\triangle ABM \sim \triangle A_1B_1M_1 \Rightarrow A_1B_1 : AB = A_1M_1 : AM$. 4. Указание. $\triangle ABL \sim \triangle A_1B_1L_1 \Rightarrow A_1B_1 : AB = A_1L_1 : AL$. 5. $AE \cdot BE = CE \cdot DE \Leftrightarrow AE : CE = DE : BE \Leftrightarrow \triangle ADE \sim \triangle CBE \Leftrightarrow \angle DAE \equiv \angle BCE \Leftrightarrow BC \parallel AD$. В₁. 6. Указание. $\triangle BHA_1 \sim \triangle AHB_1 \Rightarrow AH : BH = B_1H : A_1H \Rightarrow AH \cdot A_1H = BH \cdot B_1H$ и т.д. 7. Указание. Рассмотрим трапецию $ABCD$ ($BC \parallel AD$), $\{O\} = AC \cap BD$, M – середина стороны BC и $\{N\} = AD \cap MO$, тогда $AN : ND = BM : MC = 1 \Rightarrow AN = ND$. Следовательно, M, O, N – коллинеарные точки. Если $\{O_1\} = AB \cap CD$, то $BM : MC = AN : ND$, значит точки O_1, M, N коллинеарные. 8. Указание. В $\triangle BLM$, $\angle BLM$ – тупой, а $\angle BML$ – острый. Тогда, $BL < BM$. 9. $\triangle BMC \sim \triangle AMD$. С₁. 10. 12 см, 24 см, 30 см. 11. $AC = 48$ см, $A_1C_1 = 36$ см, $B_1C_1 = 30$ см. 12. 8 см. 13. 9 см.

§5. Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт. А. 1. 4. 2. 13 см. 3. $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ см, $2\sqrt{2}$ см, $2\sqrt{2}$ см. В. 4. 10 см. 5. $8\sqrt{3}$ см, $5\sqrt{3}$ см. 6. 42 см, 56 см. 7. $\sqrt{73}$ см, $2\sqrt{13}$ см, 5 см. С. 8. 5 см, $5\sqrt{3}$ см, 10 см. 9. $\frac{4\sqrt{10}}{3}$ см, $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ см. 10. 24 см.

§5. Реальный профиль. А₁. 1. 6. 2. $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$. 3. 1 см. В₁. 4. $2\sqrt{5}$ см. 5. $BN = 2$ см. 6. 3 см, 4 см, 5 см, 1 см. 7. 11 : 7. 8. $9\sqrt{5}$ см, $8\sqrt{10}$ см. С₁. 9. $0,4R$. 10. 8 см.

§6, 6.1. Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт. А. 1. 3 см, 7,5 см. 2. 18 см. В. 3. $60^\circ, 30^\circ$. 4. $2\sqrt{13}$ см и $3\sqrt{13}$ см. 5. $\frac{14\sqrt{3}}{3}$ см. С. 6. $\frac{24\sqrt{2}}{5}$ см. 7. 8 см, 15 см. 8. 15 см, 9 см.

§6, 6.1. Реальный профиль. А₁. 2. 18 см, 24 см, 30 см. 3. $\frac{mn(m+n)}{m^2+n^2}$. 4. $\sqrt{r_1^2 + r_2^2}$. В₁. 5. 5,6 см, 4,2 см; $r = 2,4$ см. 6. 9 см, 12 см, 15 см. С₁. 8. $\sqrt{2}$ м, $\sqrt{3}$ м. 9. $\frac{n^2+m^2}{n}, \frac{n^2+m^2}{m}$.

§6, 6.2. Реальный профиль. А₁. 1. 4 см. 3. 4 м или $\sqrt{10}$ м. В₁. 5. $\frac{9}{4}$ м, $\frac{15}{4}$ м. 6. 5 см. 7. $m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}$. С₁. 8. 10 см, 5 см, $5\sqrt{3}$ см. 9. $\frac{a\sqrt{10}}{4}$.

Упражнения и задачи на повторение

Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт. А. 2. 9 см, 12 см, 15 см. 3. $\sqrt{10}$ см. 4. 50° . 5. 6. В. 6. 400×300 м. 7. $\frac{25}{3}$ см. 9. $(2+3\sqrt{2}+\sqrt{6})$ см. 10. 90° . С. 11. 7 см. 12. $\sqrt{114}$ см.

Реальный профиль. А₁. 1. 25 см, 25 см, 30 см. 2. 8 см и 10 см. В₁. 3. 5 см, 5 см, 6 см. 4. 144,3 мм. 5. 15° , 15° , 150° или 75° , 75° , 30° . 6. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{14Rr-R^2-r^2}{3}}$. 7. $18\sqrt{3}$ см². С₁. 8. 5 : 10 : 13. 9. а) $\approx 9,42$ мм; б) $\approx 226,08$ мм. 10. а) $\approx 18,84$ дм; б) $\approx 226,08$ дм; в) $\approx 452,16$ дм. 11. ≈ 5 мин и 1,44 с. 12. $\approx 7,536$ м.

Итоговый тест. Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт. 1. 0,5 см. 2. 4,8 м. 4. $AB=12$ см, $BC=15$ см.

Реальный профиль. 1. $\frac{d\sqrt{13}}{12}$. 2. 40 дисков, 44 диска.

Модуль 5. Одночлены. Многочлены. Алгебраические дроби

§1. Реальный профиль. А₁. 1. а) 2,05, X , $\sqrt{15YZ}$, Z^{2010} ; б) $-Y^8$, $3\sqrt{2}XY$, Z , Y^{2012} . 2. а) -8 ; б) 2; в) $-\sqrt{3}$; г) 7,8 – коэффициент; а) XY ; б) X^2YZ ; в) XZ^2 ; г) Y^4Z^{10} – буквенная часть. 3. а) X^2Y^2Z ; б) Y^3Z^3 ; в) $2\sqrt{3}X^3Y^3Z$; г) XY^2Z^3 . 4. 1) а) 3; б) 1; в) 2; г) 0; 2) а) 5; б) 6; в) 3; г) 2. 5. а) $5XY$ и $-XY$; $3X^2$ и $-0,25X^2$; Z^3Y и YZ^3 ; XYZ . 6. а) $3,5XY+5Y^4$; б) $2,8Z^2+8XY$. 7. б) $41X^4YZ^2$; в) $3XYZ^4$. 8. в) $4X^4Y^{12}$; г) $3,375Y^9Z^3$. 9. в) $2XZ^3$; г) $22X^2Y^2Z^2$. 10. б) $3\frac{3}{4}ZY-Z^2+XY$. 11. б) $-2XY^2Z^4+0,01X^3Y^5Z^2+X^3Y^3Z^3$. В₁. 12. а) $58X^2Y-3X^3$. 13. а) 7 и 1; б) 2; г) 2 и 1. 14. а) Л; б) И. С₁. 16. а) $X^2Y^2Z^2$; б) X^6Y^2 .

§2. Реальный профиль. А₁. 1. а) $\text{grad } P=3$, $\text{grad } Q=4$; б) $P(2)=-3+2\sqrt{2}$; в) $Q(-2;1)=30+\sqrt{5}$. 2. 1) $S(X)=-X^4-7X^3+6X^2-3X$; $D(X)=-X^4-9X^3-4X^2-3X$; $R(X)=X^4+9X^3+4X^2+3X$. 3. г) $24X^4-2X^2-2$; е) $25X^8+40X^6+6X^4-8X^2+1$. 4. г) $3X^2-16\sqrt{3}XY+64Y^2=(\sqrt{3}X-8Y)^2$. 5. б) $X(X^2-1)(X+Y)$. 6. б) $(0,5X+1)^2$; г) $(X+1)^3$. 7. б) $(\sqrt{5}X-3\sqrt{5}Y)(\sqrt{5}X+3\sqrt{5}Y)$; в) $(5X-4Y)(25X^2+20XY+16Y^2)$. 8. в) $(2-X)(1+X)$. 9. а), б) – А. В₁. 10. б) $\text{grad } P(X)=3$; $\text{grad } Q(X)=3$ при $m \in \mathbb{R}^*$ и любых $k, p, n \in \mathbb{R}$; $\text{grad } Q(X)=2$ при $m=0$, $k \in \mathbb{R}^*$ и любых $p, n \in \mathbb{R}$; $\text{grad } Q(X)=1$ при $m=0$, $k=0$, $p \in \mathbb{R}^*$ и любых $n \in \mathbb{R}$; $\text{grad } Q(X)=0$ при $m=0$, $k=0$, $p=0$ и $n \in \mathbb{R}^*$. 11. $k=\frac{1}{7}$. 12. б) $Q(X)=-5X^4+X^3-2X^2+8$. 13. а) $(X-2)(3X^2+2X+4)$; б) $(X-\sqrt[3]{2})^2(X^2+\sqrt[3]{2}X+\sqrt[3]{4})^2$.

Указание. Замените $X^3=Y$. 14. а) $\left(X+\frac{1}{2}\right)(8X-1)$; б) не разлагается. Указание. Решите уравнения II степени, соответствующие заданным многочленам. С₁. 15. $a=c=-\frac{1}{4}$, $b=-\frac{3}{2}$, $d=1$. 16. в) $(6X+1)(21X^2-3X+1)$.

17. $P(X)=X^2$. 18. б) $(X^n-2)(X^n+2)(X^{2n}+4)$; в) $X(X^n-1)(X^n+1)$.

§3. Реальный профиль. А₁. 1. а) $a=1$, $b=-2$, $c=3$; б) $a=3$, $b=2$, $c=0$. 2. а) Если $a=1$, то $\text{grad } P(X)=2$; если $a=-1$, то $\text{grad } P(X)=1$; если $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, то $\text{grad } P(X)=3$. 3. $P(1)=0$, $P(-2)=-36$, $P(3)=104$, $Q(\sqrt{2}+\sqrt{3})=5$. 4. $r=11$. 5. $P(2)=247$. 6. $P(X)+Q(X)=2X^3-3X+1$, $P(X)-Q(X)=2X^3+6X^2-7X-1$, $P(X) \cdot Q(X)=-6X^5-5X^4+23X^3-7X^2-5X$. 7. а) $C(X)=X^5+2X^4+X^3+4X^2+8X+13$, $R(X)=30$; б) $C(X)=2X^4-X^3+7X^2-28X+86$, $R(X)=-257$. В₁. 8. а) $C(X)=2X^3+X^2-3X+6$, $R(X)=-5$; б) $C(X)=3X^2-2X-6$, $R(X)=-5X^2+23X+22$; г) $C(X)=2X^4+9X^3+19X^2+41X+82$, $R(X)=166X-163$. 9. $B(2, 9)$. 10. $3X-4$. 11. 5 и соответственно 2. 12. а) $a=1$; б) $a \in \{-3, 1\}$. 13. а) $P(X)=X^2+X+2$; б) $P(X)=2X^2+X+3$. С₁. 14. а) $a+2c-c^3=0$ и $b+1-c^2=0$; б) $a-1+c^2=0$ и $b+c=0$; в) $a+1-3c^2+c^4=0$ и $b+c^3-2c=0$. 15. а) $5-3X$; б) $-2X$; в) 2. 17*. $-6X+11$.

§4. Реальный профиль. А₁. 1. а) Да; б) да. 2. а) $-1, 1, 2$; б) -4 ; в) 24, $\frac{-3-\sqrt{13}}{2}$, $\frac{-3+\sqrt{13}}{2}$. 3. а) $(X-1)(X^2+X+1)$; б) $(X-2)(X+2)(X^2+4)$; в) $(X-2)(X+2)(X^2+1)$; г) $(X-\sqrt{3}-\sqrt{2})(X-\sqrt{3}+\sqrt{2})(X+\sqrt{3}-\sqrt{2})(X+\sqrt{3}+\sqrt{2})$. 4. а) 3; б) 2. В₁. 5. а) $(X-1)^3(X+2)^4(X+1)(X+3)^4(X+4)(X-5)$; б) $(X^2+1)^2(X-1)^5(X+1)^4(X+3)^3$; в) $(X-1)^3(X+1)^2(X^2+1)^2(X^2+X+1)(X-3)^3(X+3)^3$. 6. а) 2; б) 3. 7. а) $(X^2+1)(X^2-2X+3)$; б) $(X^2+1)(X^2+2X+7)$; в) $(X+1)(X-1)(X^2-2X+5)$; г) $(X+1)(X-1)(X^2+X+1)$. С₁. 8. $c=1$, $b=-1$, $a=-1$ или $c=0$, $b=0$, $a \in \mathbb{R}$. 10. Указание: а) Приводим к форме $P(X)=Q(X)(X-1)$, где $Q(1)=0$. 12*. $a=-8$, $b=1$. 6. 13. $x=3$ или $x=3-\sqrt{7}$.

§5. Реальный профиль. А₁. 1. а) $\mathbb{R}$; б) $\mathbb{R} \setminus \{\pm 3\}$; в) $\mathbb{R} \setminus \{-2; 0\}$. 2. б) $\frac{X^2-2X+3}{X^2-9}$; в) $\frac{X^2+5X-3}{3X(X+2)}$. 3. б) $\mathbb{R} \setminus \{\pm 3\}$;

- в) $\mathbb{R} \setminus \{-2; 0\}$. 4. а) $\frac{7}{3}$; в) $\frac{11}{24}$. **В.** 5. б) $D = \mathbb{R} \setminus \{0; \pm 4\}$; 2; в) $\frac{2X^2 + 6X + 6}{X^2 - 9}$; д) $\frac{X^3 - X^2 - 6X - 16}{X^2 - 64}$; е) $\frac{X^3 - 3X - 1}{X^2 - 1}$.
 6. а) $D = \mathbb{R} \setminus \{0; 3\}$; $2X$; в) $D = \mathbb{R} \setminus \{0; 10\}$; $-\frac{X+10}{2X^3}$; г) $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$; $\frac{X^2 - 4X + 4}{X + 2}$; е) $D = \mathbb{R} \setminus \{0; 2\}$; $\frac{X^2}{(X+2)^2(X^2+1)(X-2)}$.
С. 7. б) $D = \mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$; $X(X-1)(3X-1)$; в) $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\pm \frac{1}{2}\right\}$; $\frac{(8X^2+1)(2X-1)}{2X+1}$. 8. а) $E(X) = X + 5 + \frac{12}{X-2}$;
 б) $X \in \{-10, -4, -2, -1, 0, 1, 3, 4, 5, 6, 8, 14\}$.

Упражнения и задачи на повторение

- Реальный профиль. А.** 1. $14X^3Y^2 - 21X^3Y - 8X^2Y^2 - 84X^3 + 12X^2Y + 48X^2$. 2. б) $P(X) + Q(X) = -3X^3 - X^2 + 6X + 1$;
 $P(X) - Q(X) = 3X^3 - X^2 - 6X - 3$; $P(X) \cdot Q(X) = 3X^5 - 3X^3 - 2X^2 - 6X - 2$. 3. а) $27X^3 + 54X^2 + 36X + 8$; г) $27X^3 + 1$.
 4. а) $\{0; 5\}$; в) $\{0; 1; 3\}$. **В.** 5. б) $\left(Z - \frac{1}{2}\right)^2$; г) $(3X-1)^2$. 6. а) $-(Y+20)(9Y+20)$; б) $4X(X-9)$; г) $(Z - \sqrt{5})(Z + \sqrt{5}) \times$
 $\times (Z^2 + \sqrt{5}Z + 5)(Z^2 - \sqrt{5}Z + 5)$. 7. б) $(Y-2)(2Y^2+1)$; г) $(X+1)(X^2 + \sqrt{3})$. 8. б) $C(X) = 3X^2 + 5X - 7$; $R(X) = -1$.
 9. б) -101 . 10. а) Нет; б) нет. 11. а) $\mathbb{R} \setminus \{-2; -1; 0; 2\}$; б) $\frac{X(1-X)}{(X+1)^2(4-X^2)}$; в) $-\frac{1}{14}\sqrt{2}(11-8\sqrt{2})$. **С.** 12. а) $-2,25$;
 б) не существует. 13. $D = \mathbb{R} \setminus \{0; 3\}$; $\frac{X^3(X-3)^3}{8(X-1)^3}$. 14. $Q(X) = 15X^2 - X - 3$.

- Итоговый тест. Реальный профиль.** 1. а) $-X^4 + 9X^2 + X - 1$; б) $\text{grad } P(X) = 4$; в) $C(X) = -X^3 - X^2 + 8X + 9$, $R(X) = 8$;
 г) $\{0; \pm 3\}$; д) $C(X) = -X^2 + 8$, $R(X) = X + 7$. 2. а) $\mathbb{R}$; б) $\mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$; в) $\alpha = 2$, $E(2) = 0$.
 3. $(XY + 2X + 5)(X^2Y^2 - 2X^2Y + 10XY + 4X^2 - 10X + 25)$.

Модуль 6. Числовые функции. Основные свойства

§1. Реальный профиль. А. 1. а) $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$; б) $\mathbb{R}$; в) $\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$.

2. а) $[-2, +\infty)$; б) $(-\infty; 0,25]$; в) $\mathbb{R}^*$. 3. а), б) Нет; в) да.

В. 5. а) $(-\infty, -1] \cup (1, +\infty)$; б) $\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$; в) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$; г) $\mathbb{R} \setminus [0, 1)$. 6. а) $\mathbb{Z}$; б) $\mathbb{R}^*$; в) $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$.

7. а) $(f+g)(x) = |x| + x - 1$, $(f \cdot g)(x) = |x|(x-1)$, $(f \circ g)(x) = |x-1|$;

б) $(f+g)(x) = \sqrt[3]{x+1} + x^3 + 1$, $(f \cdot g)(x) = \sqrt[3]{x+1}(x^3+1)$, $(f \circ g)(x) = \sqrt[3]{x^3+2}$;

в) $(f+g)(x) = x^3 - 1 + \sqrt[3]{x-1}$, $(f \cdot g)(x) = (x^3-1) \cdot \sqrt[3]{x-1}$, $(f \circ g)(x) = x-2$.

С. 8. а) $(\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_n)(x) = x^{2^n}$; б) $(\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_n)(x) = x - n$. 9. а) $\Phi = f \circ g$, $f(x) = x^{17}$, $g(x) = x^{10} + 1$;
 б) $\Phi = f \circ g$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $g(x) = x^2 - 1$. 10*. Да. Например, $A = B = C = \mathbb{R}$, $M = \{0\}$, $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$. 11. $P = 0$.

§2. Реальный профиль. А. 1. а) $(-\infty, +\infty) \nearrow$; б) $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty) \nearrow$, нечетная; в) $(-\infty, 0] \searrow$, $[0, +\infty) \nearrow$, четная.

2. а) $y_{\min} = f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$; б) $y_{\max} = f(0) = 0$. 3. 1 а) $\left\{\frac{3}{2}\right\}$; 1 б) $\emptyset$; 1 в) $\{0\}$; 2 а) $\{-1; 0\}$; 2 б) $\{0\}$. 4. а) $[-2, 0) \cup (0, +\infty)$;

б) $(1, 2]$; в) $\{2\}$. 5. $f(x) = |x|$. **В.** 7. а) $(-\infty, 0] \nearrow$; $[0, +\infty) \searrow$; б) возрастает на каждом из интервалов $[n, n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$;

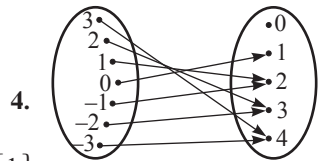
в) $[-1, 2]$, $[5, +\infty) \nearrow$; $(-\infty, -1]$, $[2, 5) \searrow$. 10. а) $y_{\max} = f(0) = 1$; б) $y_{\min} = f(0) = f(1) = 0$, $y_{\max} = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$. 11. f_2 ,
 период 1; f_3 , период 2; f_4 , период $\frac{1}{5}$. 12. а) Нечетная; б) четная; в) ни четная, ни нечетная.

С. 14*. а) $f = h_1 + h_2$, $h_1(x) = 2x^2 + 3$, $h_2(x) = -x$; б) $f(x) = h_1 + h_2$, $h_1(x) = -2$, $h_2(x) = x$. 15. а) $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
 $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x-1)$; б) $f^{-1}: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $f^{-1}(x) = \frac{2x}{x-1}$. 16. Монотонно убывающая. 17. 7. 18. $f + g$, $f + f$, f^3 ,
 $g \circ f$ – возрастающая, $-f$ – убывающая, $f - g$, f^2 могут быть не монотонными.

Упражнения и задачи на повторение

Реальный профиль. А. 1. а) $D(f) = \mathbb{R}$, $E(f) = \mathbb{R}$; б) $D(f) = \mathbb{R}^*$, $E(f) = \mathbb{R} \setminus \{3\}$; в) $D(f) = \mathbb{R}$, $E(f) = \left[-\frac{9}{4}, +\infty\right)$.

2. а) Возрастающая на $\mathbb{R}$; б) убывающая на $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$; в) убывающая на $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right]$, возрастающая на
 $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$. 3. б). **В.** 4. а) На $\left(-3, -\frac{7}{4}\right)$ – отрицательные значения, на $(-\infty, -3) \cup \left(-\frac{7}{4}, +\infty\right)$ – положительные зна-



чения; б) на $(2, 4)$ – отрицательные значения, на $(-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$ – положительные значения; в) на $\left(-\frac{26}{5}, -4\right)$ – отрицательные значения, на $\left(-\infty, -\frac{26}{5}\right) \cup (-4, +\infty)$ – положительные значения. 5. а) $y_{\max} = f(1) = 1$; б) $y_{\min} = f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{4}$; в) $y_{\min} = f(-3) = -9$. 6. $(f+g)(x) = 5$, $(f-g)(x) = 2x-1$, $(f \cdot g)(x) = -x^2 + x + 6$, $(f \circ g)(x) = 5-x$, $(g \circ f)(x) = 1-x$. 7. а), в) Нечетная; б) ни четная, ни нечетная. 8. $x = 1$ (час). 9. 63 дня. 10. $f(x) = 1600 - 25x$ – убывающая, $g(x) = 25x$ – возрастающая. С. 11. а) $\Phi = f \circ g$, $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$, $g(x) = x^7 + 2$; б) $\Phi = f \circ g$, $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x^4 + 3x^2 + 1$. 12. Функция f не обратима: существуют разные треугольники с одинаковой площадью. **Итоговый тест. Реальный профиль.** 1. С. 2. $[1, +\infty) \nearrow$, $(-\infty, 1] \searrow$. 3. $y_{\max} = f(-1) = 1$, $y_{\min} = f(0) = f(-2) = 0$. 4. $\{3; 4\}$. 5. а). 6. а) $h = f_2 \circ f_1$; б) f_1 ; в) f_4 – ограничена снизу.

Модуль 7. Элементарные функции. Уравнения. Неравенства. Системы. Совокупности

§1. Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт. А. 1. а) 2; б) -1; в) -5; г) 0. 2. а) Острый; б) тупой; в) тупой; г) нулевой. 3. а) 1) $\frac{1}{2}$; 3) $f(x) > 0$, $x \in (-\infty; \frac{1}{2})$; $f(x) \leq 0$, $x \in [\frac{1}{2}; +\infty)$; 4) тупой; 5) нет. 5. а) $S = \{4\}$; б) $S = \left\{\sqrt{\frac{2}{3}}\right\}$; в) $S = \left\{-\frac{3}{4}\right\}$. 6. а) $S = \{(2, 1)\}$; б) $S = \{(0, 1)\}$. 7. а) $S = (-\infty, -10, 5)$; б) $S = (-\infty, -10)$. 8. г) $S = (-\infty, -4)$; д) $S = \emptyset$. В. 9. а) Прут – 953 км; Днестр – 1352 км. 10. а) $-\frac{1}{2}$; б) -5; $\frac{1}{2}$; в) -4; $-\sqrt{3}$; 2. 11. а) $f(t) = 3600t + 2400$; б) 15 часов. 12. 1) 17 и 27; 3) 200 т, 320 т. 13. 12 мотоциклов, 36 автомобилей. 14. 23 купюры по 20 леев; 46 купюр по 50 леев. 15. Через 3 года. 18. 57 лет. 19. Не существует. 20. <. 21. $(-\infty, 3)$. С. 22. а) 10 рабочих; б) 3 гектолитра; 2,1 гектолитра.

§1. Реальный профиль. А. 1. а) f, f_2, f_4 ; б) f_1, f_6 . 2. а) $y = 1,5x - 2$. 3. а) $x = -\frac{2}{7}$; $y = \frac{4}{7}$; б) $x \in \left(-\infty, -\frac{2}{7}\right]$. 4. $S = \left[-\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}; 2\right]$. 5. б) $x \in (-1, +\infty)$. В. 6. 50 км/ч, 26 км/ч. 7. $x = -1$, $y = 1$. 9. а) $S = \{(1; -2)\}$. С. 10. 1,5 кг. 11. 40 т с содержанием никеля 5%, 100 т с содержанием никеля 40%. 12*. а) $a \neq \pm 1$; б) $a \neq \pm 1$; в) не существуют такие значения x .

§2. Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт. А. 2. а) $S = \{-3; 7\}$; б) $S = \left\{-\frac{3}{5}; \frac{1}{5}\right\}$; в) $S = \{-1; 5\}$; г) $S = \{-1 - \sqrt{10}; -1 + \sqrt{10}\}$. 3. а) $x_1 + x_2 = -10$, $x_1 \cdot x_2 = 20$; б) $x_1 + x_2 = 16$, $x_1 \cdot x_2 = 63$; в) $z_1 + z_2 = -0,6$, $z_1 \cdot z_2 = -1,2$; г) $t_1 + t_2 = \frac{3}{2}$, $t_1 \cdot t_2 = -3$. В. 6. а) $S = (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$; б) $S = \emptyset$; в) $S = \left(-\infty, -\frac{1+\sqrt{33}}{4}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{33}-1}{4}, +\infty\right)$; г) $S = (-2, -1)$. 7. а) $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup (1, +\infty)$, $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$; б) $\left(-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(-\infty, -\frac{5}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$; в) $(-\infty, -3) \cup (0, +\infty)$, $(-3, 0)$. 8. а) $S = \{(-\sqrt{5}; -\sqrt{5}), (\sqrt{5}; \sqrt{5})\}$; б) $S = \left\{(0; 1), \left(\frac{4}{3}; -\frac{5}{3}\right)\right\}$. 11. 8 ед. длины. 12. $a \in \{-3; 4\}$. 13. Указание. Примените теорему Пифагора. 14. 210 см². 15. 52 м, 40 м. 16. $33\frac{2}{3}$ км/ч. 18. $A = \left\{-\frac{1}{2}, 3\right\}$. 19. $(-\infty, -6)$. 20. 3. С. 21. (12 м, 40 м). 22. -5. 23. $p = 4$, $q = -\frac{1}{2}$ или $q = \frac{1}{2}$.

§2. Реальный профиль. А. 3. 510 м. 4. $a = b = 5$. В. 5. а) $S = \left\{\frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}; 2; 3\right\}$. 6. а) $S = [-4, 4]$; б) $S = (-\infty, -4] \cup [5, +\infty)$. 7. $(x-4)^2 + (y-5)^2 = \frac{36}{5}$. 8. а) $h(5) = 237,3$ м; б) $\approx 14,7$ с. 9. а) $\mathbb{R} \setminus \{2; 3\}$; б) $\{0\} \cup (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$; в) $[-3, -1] \cup [0, 3]$; г) $(-\infty, -4) \cup (-4, -1] \cup [4, +\infty)$. 10. а) $S = \{1\}$; б) $S = \{1; 8\}$. 11. а) $S = \{(1, 5; -2), (10; 15)\}$; б) $S = \{(6; 8), (8; 6)\}$. 12. а) $S = \{(3-3\sqrt{2}; 3+3\sqrt{2}), (3+3\sqrt{2}; 3-3\sqrt{2}), (2; 4), (4; 2)\}$; б) $S = \{(2; 3), (3; 2)\}$. 13. а) $m \in \{-\sqrt{10}, \sqrt{10}\}$; б) $m \in (-\sqrt{10}, \sqrt{10})$; в) $\mathbb{R} \setminus [-\sqrt{10}, \sqrt{10}]$. 15. а) $S = \{(-1; -3), (-3, -1)\}$; б) $S = \{(-4; -5), (5; 4)\}$. 16. а) $S = \left\{\left(\frac{7}{3}; -\frac{2}{3}\right); \left(-\frac{7}{3}; \frac{2}{3}\right)\right\}$; в) $S = \left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}; \sqrt{3}-1\right)\right\}$. 17. 24 км/ч, 18 км/ч. 19. а) $(x-3,5)^2 + (y-\sqrt{10})^2 = 12,25$; $(x-3,5)^2 + (y+\sqrt{10})^2 = 12,25$; б) не пересекаются; в) $(\sqrt{2}; \sqrt{2}), (-\sqrt{2}; -\sqrt{2})$. 20. в) Указание. Пусть $|3x-1| = t$, $t \geq 0$.

21. а), б) Указание. Примените метод интервалов; в) $S = (-\infty, 1)$; г) Указание. Примените метод интервалов;
 д) $S = \left\{-\frac{1}{2}; 1\right\}$; е) $S = \mathbb{R} \setminus \left\{0; \frac{1}{3}; 1\right\}$. 23. в) $S = \{(2 - \sqrt{2}; 2 + \sqrt{2}), (2 + \sqrt{2}; 2 - \sqrt{2}), (-2 - \sqrt{2}; -2 + \sqrt{2}), (-2 + \sqrt{2}; -2 - \sqrt{2})\}$.
 24. а) I завод – 24 детали; II завод – 16 деталей; б) А – 20 моторов, В – 30 моторов. 25. $m_{\text{CH}_3\text{OH}} = 0,64$ г, $m_{\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}} = 0,46$ г.
 26. $S = \{(1; 4), (-1; -4), (4; 1), (-4; -1)\}$. 27. 160 г, 20%. 28. $S = [-1, 1) \cup [2, +\infty)$. **C1.** 30. $a \in [-2, +\infty)$.
 31*. $a \in [-1; -0,2]$. 32. $(x - \sqrt{2})^2 + (y - 0,5)^2 = 2,25$.

Итоговый тест I. Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт. 1. Например, $6x - 4y = -6$. 2. а) $x_1 = -1, x_2 = \frac{2}{3}$.
 3. а) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$; б) $x \in (-1, 0] \cup (1, +\infty)$. 4. Один тюльпан – 8 леев, один нарцисс – 5 леев.

Реальный профиль. 1. $S = \{(1 \pm \sqrt{2}; -1 \pm \sqrt{2})\}$. 2. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0; 5\}$. 3. I поезд – 40 км/ч, II поезд – 60 км/ч.

- §3, 3.1-3.3. Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт. А.** 3. $f(x) \in \{0; \sqrt{2}; 2\sqrt{2}; 2\sqrt{11}; 8; 12\}$.
 4. $f(x) \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 10\}$. 5. $f(x) \in \left\{\frac{1}{10}; \frac{1}{6}; 1; -\frac{1}{2\sqrt{2}}; -\frac{1}{9}; -\frac{1}{20}\right\}$. **B.** 6. а) $y = -\frac{12}{x}$; б) $y = \frac{27}{x}$; в) $y = -\frac{5}{x}$;
 г) $y = \frac{10}{x}$. 9. Принадлежит.

§3, 3.1-3.3. Реальный профиль. А1. 1. а) $[3, +\infty)$; б) $\mathbb{R}$. 3. а) Четная; б) нечетная. **B1.** 4. а) $(f + g): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
 $(f + g)(x) = x^4 + x^5$; $(f \cdot g): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(f \cdot g)(x) = x^9$; б) $(f + g): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $(f + g)(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}$; $(f \cdot g): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,
 $(f \cdot g)(x) = \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[4]{x}$. 5. а) $[0, +\infty)$ и $(-\infty, 0]$; б) $(-\infty, -2]$ и $[-2, +\infty)$; в) $(0, +\infty)$; г) $(-4, +\infty)$.

C1. 6. а) $f^{-1}: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, $f^{-1}(x) = \sqrt[4]{x}$; б) $f^{-1}: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, $f^{-1}(x) = \frac{1}{4}x^2$; в) $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = 4x^3$.

7*. а) $(f + g): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(f + g)(x) = \sqrt[3]{x} + x^3$; $(f \cdot g): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(f \cdot g)(x) = \sqrt[3]{x} \cdot x^3$; $(f \circ g): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(f \circ g)(x) = x$;
 б) $(f + g): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(f + g)(x) = x^2 + \sqrt[3]{x}$; $(f \cdot g): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(f \cdot g)(x) = x^2 \cdot \sqrt[3]{x}$; $(f \circ g): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(f \circ g)(x) = (\sqrt[3]{x})^2$.

- §3, 3.4. Реальный профиль. А1.** 1. а) $S = \{0\}$; б) $S = \emptyset$; г) $S = \{0\}$; д) $S = \{2\}$; е) $S = \{3\}$. 2. а) $S = \emptyset$;
 б) $S = \left\{\frac{1}{2}(3 + \sqrt{17})\right\}$; в) $S = \emptyset$; г) $S = \{2\}$. 4. Л. **B1.** 5. а) $S = \{3\}$; б) $S = \{3\}$. 6. а) $S = \{2, 5\}$; б) $S = \left\{-\frac{2}{3}, \frac{1}{4}\right\}$;
 в) $S = \left\{\frac{1}{3}, 1\right\}$; г) $S = \{-1; 1,5; 2; 3\}$. 7. а) $S = \{2\}$; б) $S = \left\{\frac{1}{2}(5\sqrt{13} - 13)\right\}$; в) $S = \{-3\}$; г) $S = \{1; 2; 10\}$. 8. а) $S = \{1; 3; 4\}$;
 б) $S = \{-8; 8\}$. 9. а) $S = \{-4; 2\}$; б) $S = \{4; 9\}$; в) $S = \left\{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}, 1\right\}$. 10. б) $S = \{-4; 4\}$. 11. а) $S = \{1\}$. **C1.** 12. а) $S = \left\{-\frac{47}{24}\right\}$;
 б) $S = \{12\}$; г) $S = [5, 10]$; д) $S = \{0\}$; е) $S = \{-7; 2\}$. 13*. а) $S = \left\{\frac{(2 + \sqrt{3})^n + 1}{(2 + \sqrt{3})^n - 1}, \frac{(2 - \sqrt{3})^n + 1}{(2 - \sqrt{3})^n - 1}\right\}$; б) $S = \left\{-1; \frac{9}{16}\right\}$.
 16*. а) $S = \left\{0; \frac{63a}{65} \mid a \in \mathbb{R}\right\}$; б) $S = \{0\}$ при $a = 0$, $S = \emptyset$ при $a \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$, $S = \left\{\frac{(a-1)^2}{4}\right\}$ при $a \in [1, +\infty)$. 17. $m \in [-1, 0]$.

§3, 3.5. Реальный профиль. А1. 2. а) $S = (-1, +\infty)$; б) $S = [-3, 1]$; в) $S = \emptyset$; г) $S = (-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$; д) $S = \left[-\frac{2}{3}, -\frac{1}{5}\right]$;
 е) $S = (-10, +\infty)$. **B1.** 4. а) $S = [-5, 3]$; б) $S = [4; 4,5)$; г) $S = \{-1\} \cup [4, +\infty)$; д) $S = (-\infty, 0]$; е) $S = \mathbb{R}$.

5. а) $S = (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$; б) $S = [8, +\infty)$; в) $S = [0, 1] \cup [3, +\infty)$. 6. а) $S = \left[\frac{73}{16}, +\infty\right)$; б) $S = \emptyset$; в) $S = \left(-\infty, -\frac{19}{8}\right) \cup [4, +\infty)$.
 9. а) $S = (-\infty, -5) \cup (5, +\infty)$; б) Указание. Замените $t = \sqrt{\frac{1-x}{2x+1}}$; в) Указание. Пусть $t = \sqrt{x^2 - 3x + 5}$, $t \geq 0$. 10. $S = (-1, 1]$.

§4, 4.2. Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт. А. 1. а) И; б) И; в) Л; г) Л. 4. а) $<$; б) $>$; в) $>$;
 г) $>$; д) $>$. 5. а) И; б) И; в) Л. 6. 9а. **B.** 9. б) 64 бактерии; в) 2^{50} бактерий. 11. 151165,44 лея. **C.** 13. Указание.
 Сравните число: а) с $\left(\frac{1}{4}\right)^0$; б) с $(\sqrt{2})^0$; в) 2^0 ; г) π^0 ; д) $(\sqrt{3} - 1)^0$; е) $\left(\frac{1}{5}\right)^0$.

- §4, 4.2. Реальный профиль. А1.** 2. а) $a > 1$; б), в) $a \in (0, 1)$. 3. а) $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}} > (\sqrt{2})^{1,3}$; б) $(0,3)^{-\sqrt{3}} < (0,3)^{-1,8}$.
 4. а) $x \in (-\infty, 0)$; б) $x \in (0, +\infty)$; в) $x \in (0, +\infty)$. 5. Четная. 6. б) $S = \{3\}$; в) $S = \{-3\}$; г) $S = \{-2\}$; е) $S = \left\{\frac{2}{3}\right\}$; ж) $S = \emptyset$;
 з) $S = \{1\}$; и) $S = \emptyset$. **B1.** 7. а) $S = \{-8\}$; б) $S = \{\log_{12} 1,25\}$; в) $S = \{4\}$. 8. а) $S = \{-0,5; 0,5\}$; б) $S = \{-2; 1\}$;
 в) $S = \left\{\frac{1 - \sqrt{43}}{3}, \frac{1 + \sqrt{43}}{3}\right\}$. 9. а) $S = \{\log_2 28\}$; б) $S = \emptyset$; в) $S = \{-2\}$. 10. а) $S = \{\log_3 16\}$; б) $S = \{0, \log_4 3\}$; в) $S = \emptyset$.

11. $x = \frac{8}{5}$. 12. а) $x \in (-\infty, 0)$; б) $x \in (0, +\infty)$. 13. а) $S = \{-2, 2\}$; б) $S = \{-2, 5\}$; 14. а) $S = \{0\}$. 15. а) $S = \emptyset$; б) $S = \{1\}$.
 16. а) Указание. Пусть $(2 + \sqrt{3})^{2x+1} = t$, тогда: $(2 - \sqrt{3})^{2x+1} = \frac{1}{t}$; б) Указание. Пусть $(5 + 2\sqrt{6})^{\frac{x^2}{2}} = t$. Тогда: $(5 - 2\sqrt{6})^{\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{t}$.
 17. а) $S = \{0\}$; б) $S = \{-0,5; 0,5\}$; в) Указание. ОДЗ: $x \in \mathbb{N}, x \geq 2$. Разделите обе части уравнения на $4^{\frac{1}{x}}$. 18. а) Указание. Примените метод интервалов. 19. а) $S = \{2\}$; б) $S = \{4\}$; в) $S = \emptyset$. Указание. Примените свойства функций, соответствующих членам уравнения. 21. $S = \{-3\}$. **С1.** 22. $S = \left\{\frac{2}{3}\right\}$. 23. $a \in (-\infty; 0] \cup [3; 9]$. 24. а) Указание. Пусть $t = 25^{|x+1|}$, $t > 0$. Получим уравнение $t^2 - 2t + a = 0$; б) $S = \emptyset$ при $a \in (-\infty, 3] \cup [27, +\infty)$, $S = \left\{\log_4 \frac{16(a-27)}{3-a}\right\}$ при $a \in (3, 27)$; в) Указание. Пусть $2^x = t$, $t > 0$. Получим уравнение $at^2 - 5t + 1 = 0$.

§4, 4.3. Реальный профиль. А1. 1. а) $S = (5, +\infty)$; б) $S = (-1, +\infty)$; в) $S = (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$; г) $S = \mathbb{R}$; д) $S = \emptyset$; е) $S = [4, +\infty)$. **В1.** 2. а) $S = (-\infty, 1]$; б) $S = (-\infty, -\log_5 10)$; в) $S = (-\infty, \log_{0,7} 10]$. 3. а) $S = [-1, 15]$; б) $S = (3, +\infty)$; в) $S = \left(-\infty, \frac{7}{13}\right)$. 4. б) $S = (-\infty, -1)$; в) $S = (2, +\infty)$; г) $S = [0, +\infty)$; д) Указание. Пусть $2^x = t$, $t > 0$; ж) Указание. Пусть $8^x = t$, $t > 0$. 5. $S = \left[-\frac{3}{4}, +\infty\right)$. 6. $S = [-3; +\infty)$. **С1.** 7. а) $S = (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 2)$; б) Указание. Пусть $3^x = t$, $t > 0$. Примените метод интервалов; в) Указание. Разделим обе части неравенства на $9^{|x|}$. 8. а) Указание. Пусть $3^x = t$, $t > 0$. 10*. а) $S = \emptyset$ при $a = 0$. Указание. Решите неравенство $2 \cdot 4^{x+1} + a \cdot 2^{x+1} - a^2 < 0$ как неравенство II степени относительно 2^{x+1} , затем рассмотрите случаи $a > 0$ и $a < 0$.

§5, 5.1. Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт. А. 1. а) И; б) Л; в) Л; г) И. 4. а) $>$; б) $>$; в) $<$; г) $<$; д) $<$. **В.** 5. а) $x \in \mathbb{R}$; б) $x \in (2, 3)$; в) $x \in (-1, 1)$. 7. Указание. РН вычисляется по формуле $\text{РН} = -\lg[H^+]$. Ответ: РН = 7. 9. $2 \log_9 x$.

§5, 5.1. Реальный профиль. А1. 2. а) $0 < \log_3 2 < 1$; б) $\log_3 0,2 < 0$; в) $0 < \log_{\frac{1}{3}} 0,5 < 1$; г) $\log_{\sqrt{2}} 0,2 < 0$. 3. а), б), в) Первое число больше. **В1.** 6. $\log_{\sqrt{3}} 6 > \log_3 5$. 7. $x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. 8. а) $f^{-1}: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \log_2 x + 3$; б) $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow (2, +\infty)$, $f^{-1}(x) = 3^x + 2$. 9. а) $x \in (0; 0,2)$; б) $x \in (13, +\infty)$. **С1.** 10. б) $(1, 2] \setminus \{2\}$, $[2, +\infty)$ не четная, ни нечетная, $E(f) = \mathbb{R}_+$, $y_{\min} = f(2) = 0$. 11. а) $(-2, +\infty) \setminus \{\pm 1\}$; б) $(0, 10^{-4}) \cup (1, 10)$.

§5, 5.2. Реальный профиль. А1. 1. а) $S = \{16\}$; б) $S = \{1\}$; в) $S = \{100\}$; г) $S = \left\{3\frac{1}{3}\right\}$; д) $\left\{\frac{1}{3}\right\}$. 2. а) $S = \left\{3\frac{2}{3}\right\}$; б) $S = \{-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\}$; в) $S = \left\{\frac{3-\sqrt{41}}{2}, \frac{3+\sqrt{41}}{2}\right\}$. 3. а) $S = \{-1; 2\}$; б) $S = \{1-\sqrt{6}; 1+\sqrt{6}\}$; в) $S = \{1\}$. 4. а) $S = \{1+10 \cdot \sqrt[4]{500}\}$; б) $S = \left\{\frac{1}{4}\right\}$. **В1.** 5. а) $S = \{2; 3\}$; б) $S = \left\{-1\frac{2}{3}; 79\right\}$; в) $S = \{10^{-4}; 10^3\}$. 6. б) $S = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{1}{4}\right\}$; в) $S = \{3^{-3-\sqrt{15}}; 3^{-3+\sqrt{15}}\}$; г) $S = \{-16\}$; д) $S = \{4\}$; е) $S = \left\{\frac{\sqrt[3]{9}}{9}, \frac{\sqrt[3]{3}}{3}\right\}$; ж) $S = \{\pm 4\}$; з) $S = \{-1; 4\}$. 8. $S = \{-8; -1\}$. 9. $S = \{3\}$.

С1. 11*. а) $S = \emptyset$ при $a = 1$, $S = \left\{\frac{1}{a}; a^2\right\}$ при $a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$; в) $S = \emptyset$ при $a \in (-\infty, 0] \cup \{1\}$, $S = \left\{\frac{2-\sqrt{2}}{2}; \frac{2+\sqrt{2}}{2}\right\}$ при $a = 10$. Указание. Для $a \in (0, 1) \cup (1, 10) \cup (10, +\infty)$ решите уравнение II степени $2x(2-x) = \lg a$.

§5, 5.3. Реальный профиль. А1. 1. а) $S = (0, 1)$; б) $S = [-3, 3]$; в) $S = [1; 1,5)$; г) $S = (-4, -\sqrt{7}) \cup (\sqrt{7}, 4)$; д) $S = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, 1\right) \cup \left(2, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$. 2. а) $S = \left(-\frac{1}{3}, 0\right] \cup [3, +\infty)$; б) $S = \left(1, 6; \frac{5}{3}\right]$; в) $S = \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$. 3. а) $S = \emptyset$; б) $S = \left(2, \frac{13+\sqrt{193}}{12}\right)$. 4. $S = (3, 5]$. **В1.** 6. в) $S = \left(0, \frac{1}{3}\right) \cup (3, +\infty)$. 7. б) $S = \left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$; г) Указание. В ОДЗ исходного неравенства решите неравенство $\log_{x+2} \frac{6}{10-x^2} < 0$. **С1.** 8. $S = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{4}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$. 10. $S = \{0\} \cup [2, 3)$. 11*. а) Указание. Применив метод интервалов, решите неравенство $|x+5| \cdot |x-1| \geq x$. 12*. $a \in (0, 1)$.

Упражнения и задачи на повторение

Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт. А. 1. а) 1) $x_0 = -\sqrt{5}(2 + \sqrt{3})$, 2) $[x_0, +\infty)$; б) 1) $x_0 = -7(\sqrt{3} + 2)$, 2) $(-\infty, x_0)$; в) 1) $x_0 = \frac{51}{106}$, 2) $(x_0, +\infty)$. 2. а) $f(t) = 500 + 80t$; б) 18 месяцев. 3. а) $f(x) = 20 + 35x$; б) $142,5^\circ\text{C}$.

4. а) $f(x) = 23 + 0,18x$; б) 59 \$. **В.** 5. а) $[1, +\infty)$; б) $(-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$. 6. а) $(-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$; б) $(-\infty, 2)$; в) $(-1, +\infty)$; г) $\left(\frac{6}{5}, +\infty\right)$. 7. а) $t = 0,25$ с; б) $t = 1,5$ с. 8. $f(t) = 90 - 7,62t$, ≈ 11 часов 48 минут. **С.** 9. а), в) Второе число больше; б), г), д), е) первое число больше.

Реальный профиль. А1. 1. а) Второе число больше; б), в), г), д) первое число больше. 2. а) $S = \emptyset$; б) $S = \{\sqrt{2}\}$; в) $S = \emptyset$; г) $S = \left\{\frac{\sqrt{21}}{3}\right\}$; е) $S = \emptyset$. 3. а) $(-\infty, -1)$; б) $[0, 2) \cup (2, +\infty)$; в) $(-1, +\infty)$. **В1.** 4. Указание. $\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + R_3}$, $R_3 = 5\Omega$. 5. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 3$. 6. $S = [-1; 0] \cup \{1\}$. 7. а) 20 ед. длины; б) 24 ед. длины. 8. $f(x) = -\frac{3}{800}(x - 40)^2 + 18$.

Итоговый тест II. Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт. 1. <. 2. $0,1^{-3} > 10^{-2}$. 3. $x \in (-\infty, -1) \cup (6, +\infty)$. 4. б) Л. 5. 43 года, 9 лет.

Реальный профиль. 1. Л. 4. Указание. Пусть $\log_4(-x) = t$. 5. $S = (-\infty, -1] \cup \left[\frac{5}{3}, +\infty\right) \cup \{1\}$. 6. Указание. Пусть $6^{|x|} = t$, $t > 0$.

Модуль 8. Элементы тригонометрии

§1. Реальный профиль. А1. 1. а) $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{9}, \frac{11}{18}\pi$; б) $\frac{\pi}{3}, -\frac{13}{30}\pi, \frac{3}{2}\pi$. 2. а) $60^\circ, 90^\circ, -135^\circ$; б) $30^\circ, 108^\circ, -360^\circ$. 3. б) $-\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{3}$; в) $5 - 2\sqrt{3}$; г) $4 + \frac{\sqrt{3}}{6}$. 4. а) Да; б) да; в) нет; г) нет. 5. а) Нет; б) да; в) да; г) да. 6. а) $\sin^2 \alpha + \sin \alpha$; б) $\sin \alpha \cos \alpha (\cos \alpha - \sin \alpha)$; в) -1 ; г) $\operatorname{ctg} \alpha$. **В1.** 7. а) 1; б) -3 ; в) $\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\sqrt{2}$. 8. а) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$; б) $\frac{3+4\sqrt{3}}{3}$. 9. а) $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{4}{3}$; г) $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{2}$, $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$. 10. а) 8 см, $30^\circ, 60^\circ$; б) 2 см, $30^\circ, 60^\circ$. 11. $45^\circ, 135^\circ$. 12. ≈ 108 м. 13. $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}$ или $\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}$. 14. а) $\frac{2\pi}{3}$; б) $\frac{8\pi}{9}$; в) $\frac{4\pi}{3}$; г) $\frac{20\pi}{9}$. 15. а) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$; б) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{k\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$; в) $x \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. 16. Минус. 17. а) 0; б) $\frac{1}{4}$; в) $-\frac{3}{4}$; г) $\frac{1}{4}$. 18. а) Минус; б) минус; в) минус. 19. а) Ни четная, ни нечетная; б) четная; в) нечетная. **С1.** 20. а*) $[-3, 3]$; б*) $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$; в*) $(-\infty, -4] \cup [4, +\infty)$.

§2. Реальный профиль. А1. 2. а) 1; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) 0; г) $\cos \frac{17\pi}{70}$. 3. а) Да; б) нет; в) да; г) да. **В1.** 4. 0. 6. 1. 7. а) $\sin^2 \alpha$; г) $-\sin^2 \alpha$; д) $\frac{2}{\sin \alpha}$; е) $2(\cos \alpha + \sin \alpha)$. 8. а) $\frac{1}{2} \sin^2 2\alpha$; б) $\frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$; в) $\frac{1}{2}(1 + 3 \cos 2\alpha)$. 9. Указание. Примените соотношение $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 0,6^2$. 10. Указание. Примените соотношение $(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha)^2 = (2,5)^2$. 11. б) $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$, $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{4}{3}$, $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{3}{4}$. 12. $\sin 2\alpha = \frac{7}{25}$, $\cos 2\alpha = \frac{24}{25}$, $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{7}{24}$, $\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{24}{7}$.

С1. 15. в), г) Указание. Примените соотношение $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

§3. Реальный профиль. А1. 1. а) $S = \emptyset$; б) $S = \{(-1)^{k+1} \frac{\pi}{3} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$; в) $S = \left\{\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. 2. а) $S = \left\{\frac{\pi}{6} + \pi n \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $S = \left\{\pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$; в) $S = \emptyset$. 3. а) $S = \left\{-\frac{\pi}{6} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $S = \left\{\frac{1}{2} \arctg 25 + \frac{\pi n}{2} \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$; г) $S = \left\{-\frac{5\pi}{6} + 5\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. **В1.** 4. а) $S = \left\{\pm \frac{2\pi}{15} + \frac{2\pi k}{5} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$; г) $S = \left\{\frac{\pi}{12} + \frac{2}{3} + \frac{\pi n}{6} \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$; д) $S = \left\{-\frac{\pi}{20} + \frac{2\pi n}{5} \mid n \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. Указание. Разделите обе части уравнения на $\sqrt{2}$; е) Указание. Разделите обе части уравнения на 2, затем примените соотношение $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 5. а) $S = \left\{\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi n}{3} \mid n \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{(-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$; г) $S = \left\{-\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. 6. а) $S = \left\{-\frac{3\pi}{4} + 3\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$; в) $S = \{\arctg 3 + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{-\frac{\pi}{4} + \pi n \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$. 7. а) $S = \left\{(-1)^n \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} + \pi n \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$; г) $S = \left\{\frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{2} \mid n \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{3\pi}{8} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. 8. а) $S = \left\{\frac{\pi}{4} + \pi n \mid n \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \{\pi + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$; в) Указание. $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$; г) $S = \left\{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$; и) Указание. Разделите обе части уравнения на $\sqrt{2}$, затем

примените соотношение $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 9. а) $S = \left\{ -\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{2}; 0; \frac{\pi}{4} \right\}$. 10. $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{7}{4}$. 11. $\arcsin \frac{3}{7}$.

13. $\arcsin \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sqrt{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta}}$. 14. $2 \arccos \frac{(l+m) \cdot b}{2lm}$. **C₁**. 16*. а) $S = \left\{ \frac{\pi}{2} + 2\pi n \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$ при $a = 0$. Указание. Для $a \neq 0$ отдельно рассмотрите случаи $\Delta = 1 + 4a \geq 0$ и $\Delta = 1 + 4a < 0$, учитывая, что $|\sin x| \leq 1$; г) Указание. Решите уравнение $\sin \left(\frac{\pi}{3} - x \right) = \frac{3a-1}{2}$, учитывая, что $\left| \frac{3a-1}{2} \right| \leq 1$.

§4. Реальный профиль. А₁. 1. а) $S = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{5\pi}{4} + 2\pi n, \frac{\pi}{4} + 2\pi n \right)$; б) $S = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \right]$;

в) $S = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, -\frac{\pi}{3} + 2\pi n \right)$; г) $S = \emptyset$; д) $S = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \frac{5\pi}{3} + 2\pi n \right)$;

е) $S = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \frac{\pi}{6} + 2\pi n \right]$; ж) $S = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \frac{7\pi}{6} + 2\pi n \right)$; з) $S = \mathbb{R}$;

и) $S = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{3} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n \right)$; к) $S = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n, -\frac{\pi}{6} + \pi n \right)$; л) $S = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left[-\operatorname{arctg} 2 + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n \right)$;

м) $S = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{4} + \pi n \right)$; н) $S = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{4} + \pi n, \pi + \pi n \right)$; о) $S = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{5\pi}{6} + \pi n, \pi + \pi n \right)$;

п) $S = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left(\pi n, \frac{\pi}{3} + \pi n \right)$; р) $S = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (\pi n, \pi - \operatorname{arccotg} 3 + \pi n)$; с) $S = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [-\pi + 2\pi n, 2\pi n]$;

т) $S = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n, -\operatorname{arctg} 3 + \pi n \right) \cup \left(\frac{\pi}{4} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n \right)$.

2. а) $S = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{7\pi}{6} + 4\pi n, -\frac{\pi}{6} + 4\pi n \right]$; б) $S = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3}, \frac{7\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3} \right]$; в) $S = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\pi n}{5}, \frac{3\pi}{20} + \frac{\pi n}{5} \right)$; г) $S = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}, \frac{\pi n}{3} \right)$;

д) $S = \mathbb{R}$. **В₁**. 3. а) $S = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3\pi}{4} + 2\pi n \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$; б) $S = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left[\pi n, \frac{\pi}{3} + \pi n \right]$; в) $S = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5}, \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi n}{5} \right)$.

г) Указание. Решите неравенство $\sin 3x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$; д*) Указание. Введите вспомогательное неизвестное $t = |\cos x|$;

е*) Указание. $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. 4. Указание. $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$. 5. Указание. Запишите заданное уравнение в виде: $(\sin x - \sin 3x)(\sin x + \sin 3x) + \sin^2 2x = 0$, затем преобразуйте в произведение выражения в скобках.

C₁. 8. $S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi \right)$.

Упражнения и задачи на повторение

Реальный профиль. А₁. 1. а) $\frac{2+\sqrt{3}}{4}$; б) $\frac{1}{4}$. 2. а) $-0,28$; б) $0,68$. 3. а) -3 ; б) 0 . 4. $2,4 \cdot \sqrt{2+\sqrt{3}} \approx 4,63$ м. 5. $(20 - 10\sqrt{3})$ см.

6. $\operatorname{ctg} \frac{3\pi}{4}$, $\cos \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{\pi}{6}$, $\sin \frac{2\pi}{3}$. 8. а) $\frac{2\pi}{3}$; б) $-\frac{\pi}{6}$; в) $\frac{5\pi}{6}$. **В₁**. 10. 5° ; 150° ; 720° ; 1500° . 11. Меньше 1. 12. а) Плюс;

б) минус. 13. а) Ни четная, ни нечетная; б) нечетная. 14. Указание. Используйте соотношение $(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha)^2 = m^2$.

а) $m^2 = 2m$; б) $m(m^2 - 2m - 1)$. 15. а) И; б) Л. 16. $S = \left\{ \frac{5\pi}{6} \right\}$. 19. -330° . 20. 2 случая: 1) $\arccos \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} \right)$ –

величина угла при основании, $\pi - 2 \arccos \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} \right)$ – величина угла при вершине; 2) $\arccos \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} \right)$ – величина

угла при основании, $\pi - 2 \arccos \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} \right)$ – величина угла при вершине.

C₁. 22*. а) $S = \left\{ \pi - \arcsin \frac{3\sqrt{20}}{20} - \arcsin \frac{2\sqrt{5}}{5} + 2\pi n \mid n \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \arcsin \frac{3\sqrt{20}}{20} + \arccos \frac{2\sqrt{5}}{5} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$; б) $S = \left\{ -\frac{\pi}{6} + 2\pi n \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$.

23*. а) $S = \left\{ \frac{\pi}{4} + \pi n \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$; б) $S = \left\{ \frac{\pi}{3} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Итоговый тест. Реальный профиль. 1. D. 2. Л. 3. $-0,96$; $0,28$; $-3\frac{3}{7}$; $-\frac{7}{24}$. 4. $S = \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. 5. $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right]$.

6. $\arcsin \frac{5\sqrt{41}}{41}$.

Модуль 9. Четырехугольники. Многоугольники. Повторение и дополнения

§1. Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт. А. 1. 44 см. 2. 12 см. 3. 50° , 130° . 4. 70° , 110° . 5. 70° . 6. 35° . **В.** 9. 75° , 105° . 10. 9,6 см. 11. Нет. 15. 20 см. **С.** 16. 24 см, 40 см. 17. 56 см, 84 см.

§1. Реальный профиль. А₁. 1. $\angle DAE \equiv \angle AEB$ как внутренние накрест лежащие углы. 2. Указание. Через вершины острых углов постройте параллельные катетам прямые и получите прямоугольник. 3. 16. 4. 20° . 5. $8\sqrt{5}$ см; $4\sqrt{5}$ см. 6. $\frac{85}{8}$ см. 7. 9 см; 25 см. **В₁.** 8. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ дм. 9. $\frac{2R\sqrt{3}}{3}$. 10. Указание. См. решение задачи 7 С, стр. 46. **С₁.** 11. $2(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ см. 12. 18 м, 12 м, 36 м, 30 м. 13. 6 см; $\frac{15\sqrt{41}}{8}$ см. 14. Указание. Если построить высоты, исходящие из вершин тупых углов, то получим два конгруэнтных треугольника. 15. $d_1 + d_2$. 16. 1 : 6.

§2. Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт. А. 1. а) 12 сторон; б) 18 сторон. 2. а) 10 сторон; б) 15 сторон. **В.** 3. $0,5R$. **С.** 6. $a\sqrt{\frac{2}{3}}$.

§2. Реальный профиль. А₁. 1. $R = \frac{a_n}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}}$, $r = \frac{a_n}{2} \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n}$. 2. $3\sqrt{3}$ м, $4\sqrt{2}$ м, 6 м, $8\sqrt{2-\sqrt{2}}$ м, $12\sqrt{2-\sqrt{3}}$ м.

В₁. 3. $\frac{9\sqrt{2}+2\sqrt{6}-6\sqrt{3}}{6}$ м². **С₁.** 4. $2\sqrt{6}$ м.

§3. Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт. А. 1. 600 см². 2. 60 см². **В.** 3. $12\sqrt{3}$ см². 4. 60 см². 5. 157,5 см². 6. 108 см². 7. 38 см². 8. 30 см². **С.** 9. 144 см². 10. 4π см².

§3. Реальный профиль. А₁. 1. $\frac{d^2-4a^2}{4}$. 2. $5\sqrt{35}$ см². 3. $\frac{9}{4}$ м², $\frac{15}{4}$ м². **В₁.** 4. $20\sqrt{21}$ м². 5. 5 м². 6. 150 см². 7. $12\sqrt{3}$ см². 8. $18\sqrt{3}$ см². 9. $\frac{ab}{4}$. **С₁.** 10. 8 см. 11. $\angle ABE = 2$ кв. ед., $\angle AED = 4$ кв. ед. 12. $\frac{3d^2}{4}$. 13. 3,6 дм².

Упражнения и задачи на повторение

Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт. А. 1. $\sqrt{2}-1$. 2. $\frac{136\sqrt{2}}{5}$ см. 3. 60° , 120° . **В.** 4. 7,5 см. 5. 4 : 1. 6. 150° . 7. 12 см. 8. 3 см. 9. 8 см. 10. $8\sqrt{5}$ см. 11. $2\sqrt{2}$ см. 12. $10\sqrt{3}$ см. 13. 36 см. **С.** 14. 28 см². 15. 24 см.

Реальный профиль. А₁. 1. $r(2R+r)$. 2. 5 см. 3. 3 : 4. **В₁.** 4. 73 : 70. 5. $3\sqrt{15}$ см. 6. $4\sqrt{5}$ см. 7. 25π см². 8. $(20+2\sqrt{10})$ см. 9. 24 см². 10. $\frac{a-b}{2}$. 11. $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. 12. 30° , 60° . **С₁.** 15. Равнобедренные прямоугольные треугольники с катетами $\sqrt{2}a$. 16. Равнобедренные треугольники с углом α при вершине.

Итоговый тест. Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт. 1. а) И; б) 6π см². 3. 30 см, $15\sqrt{21}$ см. 4. 288 см².

Реальный профиль. 1. $\frac{37\sqrt{3}}{4}$ см². 2. Указание. Докажите, что эта величина равна высоте треугольника. 3. 4 см, $\frac{5\sqrt{41}}{4}$ см. 4. $\frac{R^2}{12}(7\pi+6+3\sqrt{3})$ (кв. ед.).

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
-------------------	---

Модуль 1. Действительные числа. Повторение и дополнения

§ 1. Рациональные, иррациональные, действительные числа	4
§ 2. Изображение действительных чисел на числовой оси. Сравнение действительных чисел	6
§ 3. Арифметические операции над действительными числами	7
§ 4. Пропорции. Проценты	8
Упражнения и задачи	11
Итоговый тест	12

Модуль 2. Элементы математической логики и теории множеств

§ 1. Множества	13
§ 2. Элементы математической логики	18
Упражнения и задачи на повторение	23
Итоговый тест	24

Модуль 3. Корни. Степени. Логарифмы

§ 1. Корни	25
§ 2. Степень с действительным показателем	29
§ 3. Логарифмы	33
Упражнения и задачи на повторение	36
Итоговый тест	38

Модуль 4. Геометрические фигуры на плоскости. Треугольники. Окружность и круг. Повторение и дополнения

§ 1. Элементы дедуктивной геометрии	40
§ 2. Окружность и круг	47
§ 3. Треугольники. Конгруэнтность треугольников. Классификации	51
§ 4. Подобие фигур. Подобие треугольников. Теорема Фалеса	56
§ 5. Замечательные линии и точки треугольника ..	59
§ 6. Метрические отношения в треугольнике	62
Задачи на повторение	67
Итоговый тест	69

Модуль 5. Одночлены. Многочлены. Алгебраические дроби

§ 1. Одночлены. Операции над одночленами	71
§ 2. Многочлены	73
§ 3. Многочлены от одной переменной	76
§ 4. Корни многочленов	81
§ 5. Алгебраические дроби	84
Упражнения и задачи на повторение	86
Итоговый тест	87

Модуль 6. Числовые функции. Основные свойства

§ 1. Понятие функции. Повторение и дополнения	88
§ 2. Основные свойства числовых функций	92
Упражнения и задачи на повторение	100
Итоговый тест	101

Модуль 7. Элементарные функции. Уравнения. Неравенства. Системы. Совокупности

§ 1. Функция I степени. Уравнения I степени. Неравенства I степени. Системы. Совокупности	102
§ 2. Функция II степени. Уравнения II степени. Неравенства II степени. Системы. Совокупности	113
Итоговый тест I	127
§ 3. Функция радикал. Степенная функция. Иррациональные уравнения. Иррациональные неравенства	128
§ 4. Показательная функция. Показательные уравнения. Показательные неравенства	139
§ 5. Логарифмическая функция. Логарифмические уравнения. Логарифмические неравенства	147
Упражнения и задачи на повторение	156
Итоговый тест II	158

Модуль 8. Элементы тригонометрии

§ 1. Тригонометрические функции	159
§ 2. Преобразования тригонометрических выражений	169
§ 3. Тригонометрические уравнения	174
§ 4. Тригонометрические неравенства	185
Упражнения и задачи на повторение	191
Итоговый тест	192

Модуль 9. Четырехугольники. Многоугольники. Повторение и дополнения

§ 1. Параллелограмм и его свойства. Трапеция	195
§ 2. Многоугольники. Правильные многоугольники	201
§ 3. Площади плоских фигур	206
Задачи на повторение	209
Итоговый тест	211

Ответы и указания	213
-------------------------	-----

10

Математика

Учебник для 10-го класса